This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 3238.99.3

SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT WITH INCOME

FROM THE BEQUEST OF

HENRY LILLIE PIERCE

OF BOSTON

UNDER A VOTE OF THE PRESIDENT AND FELLOWS
OCTOBER 24, 1908

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

J. MASSAU

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

SECOND FASCICULE

GAND,

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE E. VAN GOETHEM,

Rue des Foulons, 1, (près de l'Université).

1902

PICARD & FILS
EDITEURS
RUE BONAPARTE
82
PARIS VI^E ARROND^T
ANCIENNE
D'OCCASION
COMMISSION
LIVRES NEUFS
FRANÇAIS
&
ETRANGERS

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

J. MASSAU

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

SECOND FASCICULE

GAND,

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE E. VAN GOETHEM,

Rue des Foulons, 1, (près de l'Université).

1902

1579.v5

Math 3238.79.3

RAUNTL JUL 18 1911

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

J. MASSAU

Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur à l'Université de Gand*

CHAPITRE IV.

Equilibre limite des terres sans cohésion.

90. *Historique.* — On a admis pendant longtemps la théorie du prisme de plus grande poussée : on suppose, avec Coulomb, que les terres glissent suivant un plan, et l'on détermine ce plan de manière à obtenir la plus grande poussée. On considère quelquefois ces deux hypothèses comme distinctes ; la première suffit cependant, car si l'on prend un plan quelconque comme plan de glissement, on démontre facilement que l'on obtient une poussée trop petite ; on trouvera donc la poussée juste et le vrai plan de glissement en cherchant le maximum de la poussée fausse. S'il n'y a pas de plan de glissement, ce maximum sera encore inférieur à la poussée réelle.

En 1856, Rankine lut à la Société royale de Londres un mémoire sur la stabilité de la terre sans cohésion (1). Rankine y applique les équations de Lamé et lève l'indétermination en supposant l'existence d'une famille de courbes à pression verticale constante par unité de projection horizontale et en appliquant le principe de moindre résistance de Moseley.

* Voyez tome XXII des *Annales des Ingénieurs de Gand*, pages 85-214.

(1) Philosophical transactions (1856-1857). *Annales des Ponts-et-Chaussées*, septembre, 1874.

En 1867, M. Maurice Lévy présenta à l'Académie des sciences de Paris un mémoire qui fut l'objet d'un rapport approbatif de B. de Saint-Venant et parut en 1873 dans le Journal de Liouville (1). C'est dans ce mémoire que se trouve établie pour la première fois la théorie rationnelle et définitive de l'équilibre des terres sans cohésion. M. Maurice Lévy, comme Rankine, applique les équations de Lamé et constate qu'il y a une infinité d'états d'équilibre ; mais il lève l'indétermination du problème par le raisonnement suivant :

« Mais je dis maintenant que parmi tous ces états, il nous suffit, au point de vue des applications aux murs, d'en étudier un seul : c'est l'équilibre limite qui a lieu lorsque les terres sont sur le point de se mettre en mouvement. Supposons, en effet, qu'un mur de soutènement ait été établi, de façon à résister aux pressions qu'il subit dans cet état particulier que nous appellerons (L) ; je dis qu'il résistera dans tout autre état (A) des terres. En effet, s'il ne résistait pas dans l'état d'équilibre (A), il chuterait et les terres se mettraient en mouvement, il faut qu'elles passent par l'état d'équilibre (L) qui se produit immédiatement avant le mouvement ; et comme, par hypothèse, le mur résiste dans cet état, il empêchera les terres de le dépasser et les y maintiendra. »

En exprimant que le massif se trouve dans cet état d'équilibre limite, l'auteur ramène la question à l'intégration d'un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre ou d'une équation du second ordre. Il effectue cette intégration dans le cas où la surface supérieure des terres est un plan indéfini ; les pressions sont alors des fonctions linéaires des coordonnées du point correspondant, résultat déjà obtenu par Rankine. Mais il démontre que cette solution linéaire n'est applicable aux murs que si l'on donne à la face intérieure une inclinaison convenablement calculée, condition qui échappe à la théorie de Rankine. Enfin, il démontre que l'hypothèse du plan de glissement n'est vraie que dans les cas où la solution linéaire est applicable.

91. *Objet de ce chapitre.* — L'intégration exacte des équations de l'équilibre limite paraît inabordable dans le cas général. Les cas particuliers où l'on sait intégrer sont peu nombreux. Nous avons cité la solution linéaire ; M. Boussinesq a traité un cas très spécial comprenant celui où le poids des terres est nul. Nous trouverons plus loin deux autres solutions analytiques, l'une applicable au cas de deux murs parallèles de grande hauteur, l'autre applicable aux silos.

(1) *Journal de Liouville*, 1873, pages 241-300. Sur une théorie rationnelle des terres fraîchement remuées et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement, par M. Maurice Lévy.

Mais la plupart des problèmes utiles ne peuvent être résolus par une intégration exacte. Nous nous proposons de résoudre ces problèmes par les méthodes approchées du chapitre II de ce mémoire. Nous supposons un massif prismatique à génératrices horizontales ; il suffit d'étudier les pressions dans une section droite ; il n'y a que deux variables indépendantes. Dans le cas d'un massif de forme quelconque, les équations sont à trois variables indépendantes ; nous les étudierons dans le chapitre V.

§ 1er. PRESSIONS AUTOUR D'UN POINT.

92. *Ellipsoïde des pressions.* — Isolons un volume de terre infiniment petit ayant pour limite un point A et appliquons les six équations d'équilibre ; le poids de ce volume est du troisième ordre ; les termes qui contiennent les pressions sur la surface de ce volume sont du second ordre ; les pressions qu'il faut introduire diffèrent infiniment peu des pressions en A ; on en conclut facilement, en passant aux limites relatives, que les pressions en A sont telles qu'elles se font équilibre lorsqu'on les applique à une surface fermée quelconque. En appliquant cet équilibre au tétraèdre, on obtient la loi de l'ellipsoïde. Supposons le massif prismatique et n'étudions que les pressions situées dans une section droite ; alors les pressions autour d'un point sont telles qu'elles se font équilibre sur tout contour fermé ; on obtient la loi de l'ellipse des pressions ; c'est cette loi que nous allons établir directement.

93. *Pressions conjuguées et pressions principales.* — Nous ne considérons que des facettes perpendiculaires au plan de symétrie. Soient (fig. 58) : P la pression sur une facette AB, AC une facette parallèle à la pression P. Construisons le parallélogramme ABDC et exprimons que les pressions sur le contour fermé ABDC se font équilibre. Les pressions P sur les facettes AB et DC se font directement équilibre ; on en conclut que les pressions P′ sur les facettes BD et CA doivent aussi se faire équilibre : donc elles sont dirigées suivant la droite qui joint leurs points d'application et par conséquent sont parallèles à AB. Les pressions P et P′ possèdent la propriété que chacune d'elle est parallèle à la facette pressée par l'autre ; on les appelle pressions conjuguées.

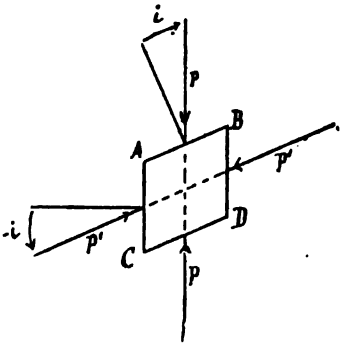

Fig. 58.

La pression P sur AB fait avec la normale à la facette qu'elle sollicite un angle i ; nous lui donnerons le signe plus quand il est décrit dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.

Faisons tourner la facette AB autour de A jusqu'en AC ; on voit que l'angle i change de signe ; il existe donc une facette pour laquelle l'angle i est égal à zéro. La pression p_1 sur cette facette, est une pression normale ; en menant une facette parallèle à p_1, on trouve la pression conjuguée p_2 ; l'angle i est nul pour p_2 comme pour p_1 ; il existe donc deux facettes qui sont perpendiculaires l'une à l'autre et pressées normalement : ces facettes et ces pressions sont dites principales.

95. *Ellipse des pressions.* — Soient (fig. 59) AB et AC les facettes principales, p_1 et p_2 les pressions sur ces facettes; nous supposerons :

$$p_2 > p_1$$

et nous écrirons :

$$p_2 = m + n,$$

$$p_1 = m - n.$$

D'où l'on tire :

$$m = \frac{p_1 + p_2}{2},$$

$$n = \frac{p_2 - p_1}{2}.$$

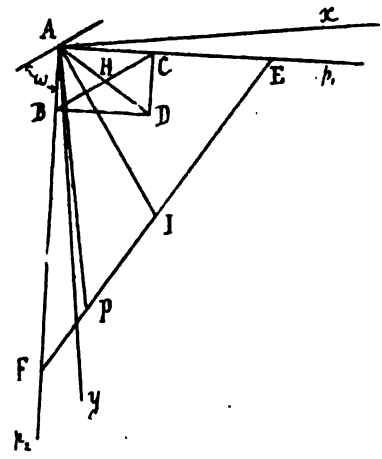

Fig. 59.

Soit à chercher la pression P sur une facette quelconque ; menons BC parallèlement à cette facette et exprimons que les pressions sur ABC se font équilibre. La pression sur BC doit faire équilibre aux pressions sur AB et AC. Mais on peut considérer l'autre face du plan BC, alors la pression sur BC change de sens ; elle est la résultante des pressions sur AB et AC.

Supposons d'abord une pression uniforme et égale à m sur les facettes AC et AB ; nous nous trouvons dans le cas d'un liquide ; nous obtiendrons sur BC la même pression normale égale à m ; nous l'avons représentée par AI. Nous devons alors introduire la pression normale n sur AC et la pression normale $-n$ sur AB ; cette dernière équivaut à la pression n sur CD. La résultante de ces

deux pressions nous donnera une pression normale n sur AD ; nous l'avons représentée par IP. La pression vraie sur B C supposé égal à l'unité, est alors :

$$\overline{AP} = \overline{AI} + \overline{IP},$$

$$AI = m = \frac{p_1 + p_2}{2},$$

$$IP = n = \frac{p_2 - p_1}{2}.$$

Prolongeons IP jusqu'à la rencontre des pressions principales, en E et en F. Le triangle AIE est isocèle comme ayant ses côtés perpendiculaires à ceux du triangle AHB ; il en est de même du triangle AIF dont les côtés sont perpendiculaires à ceux du triangle AHC ; on a donc :

$$AI = IE = IF = m.$$

Or

$$IP = n.$$

Donc

$$EP = m + n = p_2,$$

$$FP = m - n = p_1,$$

$$EF = p_2 + p_1.$$

La figure AFIE peut être construite pour toutes les directions de la facette menée par A. Si l'on fait tourner cette facette autour de A, la normale AI tourne aussi autour de A ; la droite EF est une droite invariable dont les extrémités glissent sur deux axes rectangulaires ; le point P invariablement lié à cette droite, décrit une ellipse qui est l'ellipse des pressions. Les demi-axes de cette ellipse sont les pressions principales.

95. *Epure circulaire.* — Nous nous proposons de construire une épure donnant la pression en grandeur et direction sur une facette quelconque. Nous déterminerons l'orientation d'une façette par l'angle ω qu'elle fait avec la pression maxima ; cet angle sera affecté du signe plus s'il est porté dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre. Nous avons à déterminer, pour chaque valeur de ω, la grandeur de la pression P et l'angle i que fait cette pression avec la normale à la facette pressée.

Remarquons (fig. 59) que l'angle ω est aussi l'angle de la normale AI avec la pression minima et que l'on a :

$$\text{AIP} = 2\omega.$$

Portons (fig. 60) la pression moyenne m sur une droite fixe AI ; portons l'angle 2ω en AIP et prenons IP égal à n ; nous construisons ainsi un triangle AIP égal au triangle AIP de la figure précédente ; on aura donc la pression P et l'angle i. L'angle 2ω est porté dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ; mais l'angle i est porté en sens contraire. En faisant varier ω de 0 à 180°, le point P décrit une circonférence de rayon n ; on obtient toutes les valeurs de la pression P et de l'angle i.

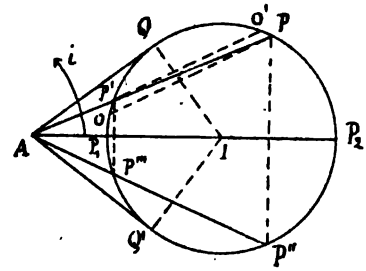

Fig. 60.

Pour obtenir la pression sur une facette, on doit construire l'angle 2ω qui détermine le point P ; mais on peut rendre cette construction inutile. Joignons le point P à un point quelconque O de la circonférence ; lorsque le rayon IP décrit l'angle au centre 2ω, le rayon OP ou son prolongement décrit l'angle inscrit ω. Nous pouvons alors choisir le point O de manière que le rayon OP donne la direction de la facette. Il suffit de réaliser cette condition pour une facette initiale en prenant par exemple OP_1, parallèlement à la facette pressée par p_1 ; cette condition sera réalisée pour toutes les facettes. On peut alors considérer le point O comme le pôle autour duquel on fait tourner la facette OP, on obtient la pression P et l'angle i portés en coordonnées polaires ; A est le pôle des pressions ; AI est l'axe initial, mais l'angle i est porté dans un sens contraire au sens dans lequel il est décrit.

96. *Équilibre limite et facettes de glissement.* — Si on fait varier ω de 0 à 180°, on obtient toutes les facettes ; le point P (fig. 60) part de la position P_1, et décrit toute la circonférence ; l'angle i croit à partir de zéro et passe par un maximum positif que nous désignerons par φ et qui est l'angle IAQ formé par la tangente AQ et la droite AI. Dans le triangle rectangle AIQ on a :

$$\sin \varphi = \frac{n}{m}.$$

Cette valeur de l'angle i correspond à l'angle ω déterminé par :

$$2\omega = \text{AIQ} = \frac{\pi}{2} - \varphi ;$$

d'où :

$$\omega = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

L'angle i diminue ensuite et change de signe en passant par zéro pour :

$$2\omega = \pi \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$$

L'angle i passe alors par un minimum ou un maximum négatif dont la valeur absolue est la même que celle du maximum positif ; cette valeur $-\varphi$ s'obtient en prenant :

$$2\omega = -\text{AIQ}' = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

ou :

$$\omega = -\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Pour que les terres soient en équilibre, il faut que l'angle φ soit égal ou plus petit que l'angle du frottement des terres. Il y a donc une infinité d'états d'équilibre. Mais nous considérons spécialement l'état d'équilibre d'un massif qui est sur le point de se mettre en mouvement ; alors l'angle φ est déterminé ; il est égal à l'angle du frottement.

Les deux facettes qui correspondent aux valeurs $\pm\varphi$ de l'angle i sont alors les facettes de glissement ; elles forment avec la pression maxima les angles :

$$\omega = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Elles forment ensemble l'angle complémentaire de l'angle φ. Ces facettes sont représentées (fig. 60) par OQ' et OQ, la bissectrice de leur angle aigu par OP_1, la bissectrice de leur angle obtus par OP'.

Les pressions sur les plans de glissement sont deux pressions conjuguées ; en effet, la pression sur l'une des facettes fait avec cette facette l'angle complémentaire de l'angle φ ; c'est précisément l'angle des deux facettes ; donc la pression sur la première facette est parallèle à la seconde.

Il est facile de démontrer que les bissectrices des angles φ et $-\varphi$ formés par les pressions sur les facettes de glissement et les normales à ces facettes coïncident avec les bissectrices de l'angle droit des pressions principales. En effet, de l'équation qui donne les valeurs de ω qui correspondent aux facettes de glissement, on déduit :

$$\omega \pm \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Or ω désigne l'angle de la normale à la facette et de la pression minima ; le premier membre de l'équation précédente est donc l'angle des bissectrices dont il s'agit avec la pression minima et ces angles sont de 45°.

Remarquons enfin que dans l'équilibre limite, toutes les ellipses de pression sont semblables ; on a, en effet :

$$\sin\varphi = \frac{n}{m} = \frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1},$$

$$p_1 = p_2 \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = p_2 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Toutes les épures circulaires sont aussi semblables ; et comme l'échelle des pressions peut être prise arbitrairement, la même épure circulaire convient à tous les points du massif. Cependant le pôle des facettes dépend du point autour duquel on étudie les pressions.

97. *Retour aux pressions conjuguées.* — Donnons-nous la valeur absolue de l'angle i et cherchons les facettes et les pressions correspondantes. On trouve (fig. 60) les quatre points P, P', P'', P'''. Les points P et P' correspondent à deux facettes dont les angles de direction ω et ω' satisfont à l'équation

$$\frac{\mathrm{AIP} + \mathrm{AIP'}}{2} = \frac{\pi}{2} - i ;$$

d'où :

$$\omega + \omega' = \frac{\pi}{2} - i,$$

$$\left(\omega + \frac{i}{2}\right) + \left(\omega' + \frac{i}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Or, les deux termes du premier membre de la dernière équation représentent les angles de la bissectrice de l'angle i avec la pression minima ; on voit que pour les points P et P' les bissectrices occupent des positions symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle droit des pressions principales. Ainsi en faisant varier l'angle ω de 0 à 90°, on rencontrera deux valeurs égales de l'angle i. Cependant si l'angle i est égal à l'angle φ, les points P et P' viennent se confondre en un point unique Q et ces deux valeurs sont égales. La bissectrice de l'angle φ est sa propre symétrique ; elle se confond avec la bissectrice de l'angle des pressions principales.

Les points P'' et P''' correspondent à deux valeurs égales et négatives de i. On sait que pour la pression conjuguée, l'angle i change de signe ; les points P'' et P''' correspondent donc aux pressions conjuguées aux précédentes. Nous allons démontrer que les pressions AP' et AP'' sont conjuguées ; on démontrerait de la même manière que les pressions AP et AP''' le sont aussi.

En effet, les angles positifs ω, ω', ω'' qui déterminent les facettes correspondantes aux pressions AP, AP', AP'' satisfont aux équations :

$$\omega + \omega' = \frac{\pi}{2} - i,$$

$$\omega + \omega'' = \pi.$$

On en déduit :

$$\omega'' = \omega' + \frac{\pi}{2} + i.$$

On reconnaît facilement que pour obtenir la conjuguée de la pression P', il faut faire tourner la facette de l'angle $90^0 + i$; on obtiendra donc la facette déterminée par l'angle ω'' ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que AP'' est égal à AP ; on peut donc dire que AP et AP' sont les grandeurs de deux pressions conjuguées ; mais pour l'une d'elles, l'angle i doit changer de signe.

98. *Problème.* — On suppose l'équilibre limite ; on donne, en un point, la pression sur une facette, trouver toutes les pressions autour de ce point.

Construisons l'épure circulaire à une échelle indéterminée. Prenons (fig. 60) la longueur AI arbitrairement ; traçons la droite AQ faisant

l'angle du frottement avec AI ; du point I abaissons la perpendiculaire IQ sur cette droite AQ et traçons du point I comme centre la circonférence de rayon IQ. On connaît la pression sur une facette ; on connaît donc, en grandeur et en signe, l'angle i que fait cette pression avec la normale à la facette. Construisons cet angle en IAP ; nous l'avons supposé positif. Nous pouvons alors faire deux hypothèses : supposer que la pression connue est représentée par AP ou supposer que cette même pression est représentée par AP' ; nous obtiendrons ainsi deux solutions du problème.

Dans le premier cas, l'échelle de l'épure sera déterminée par l'équation :

$$AP = Pl,$$

P étant la pression donnée en nombre et l la longueur qui représente l'unité de pression. Menons, par le point P, la droite PO parallèle à la facette qui supporte la pression AP ; nous obtiendrons le pôle O des facettes. On obtient alors immédiatement la pression sur une facette quelconque ; les facettes principales sont OP_1 et OP_2 ; les facettes de glissement sont OQ et OQ'. La pression conjuguée à la pression donnée est représentée par AP''' ou AP'. Ce qui caractérise cette première solution, c'est que la pression donnée est plus grande que sa conjuguée. Nous allons calculer le rapport de ces deux pressions.

Résolvons le triangle AIP ; on donne :

$$PAI = i,\ AI = m,\ IP = n = m \sin \varphi.$$

Nous trouverons le côté P ou AP par l'équation :

$$m^2 \sin^2 \varphi = m^2 + P^2 - 2\,P\,m \cos i.$$

On obtient :

$$\frac{P}{m} = \cos i \pm \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \varphi}.$$

On trouve deux valeurs ; l'une donne AP ; l'autre donne évidemment P' ou AP'', car le triangle AP'I satisfait aussi aux trois conditions que nous avons exprimées ; on a donc :

$$\frac{P}{P'} = \frac{\cos i + \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \varphi}}{\cos i + \sqrt{\cos^2 i - \cos^2 \varphi}}.$$

On obtiendra la seconde solution du problème en prenant AP' pour la pression donnée P : l'échelle des pressions est alors déterminée par

$$AP' = Pl',$$

en désignant par l' la longueur qui représente l'unité de pression. Le rapport de la pression donnée à sa conjuguée est renversé ; la pression conjuguée est multipliée par le carré de ce rapport lorsqu'on passe de la première solution à la seconde. On obtient le pôle O' des facettes en menant P'O' parallèlement à la facette qui supporte la pression donnée.

99. *Détermination analytique*, — Reprenons la figure 59 ; la pression P ou AP peut être déterminée par sa composante normale suivant AI et sa composante tangentielle ; on trouve facilement ces deux composantes en remarquant que l'angle AIP est de 2ω ; on obtient :

$$N = m - n \cos 2\omega \qquad (1),$$

$$T = n \sin 2\omega \qquad (2).$$

Menons par A des parallèles aux axes coordonnés supposés rectangulaires ; nous représenterons par p_x la pression sur la facette Ay ; ses composantes seront désignées par p_{xx} et p_{xy}. De même la pression sur la facette Ax se représentée par p_y et ses composantes par p_{yx} et p_{yy}. Nous pouvons déterminer les pressions en A en nous donnant l'angle

$$u = x\mathrm{A}p_x$$

et les pressions principales ou m et n ; nous allons déduire de ces trois quantités, les pressions sur les facettes parallèles aux axes ; nous résoudrons ensuite le problème inverse.

Nous appliquerons les formules (1) et (2) à la facette Ay en faisant :

$$\omega = -\left(u - \frac{\pi}{2}\right).$$

On trouve :

$$p_{xx} = m + n \cos 2u \qquad (3),$$

$$p_{xy} = n \sin 2u \qquad (4).$$

Nous appliquerons ces mêmes formules (1) et (2) à la facette Ax en faisant :

$$\omega = yA\,p_1 = \pi - u.$$

On trouve :

$$p_{yy} = m - \cos 2u \qquad (5),$$

$$p_{yx} = n \sin 2u \qquad (6).$$

Dans la dernière formule, la force tangentielle T est $-p_{yx}$; nous avons changé tous les signes. Les formules (4) et (6) démontrent l'égalité des composantes p_{xy} et p_{yx} ; c'est la réciprocité des composantes tangentielles.

Si on donne les trois composantes p_{xx}, p_{xy}, p_{yy}, on obtient u, m et n par les équations (3) (4) et (5) ; on trouve :

$$m = \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} \qquad (7),$$

$$n \cos 2u = \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \qquad (8),$$

$$n \sin 2u = p_{xy} \qquad (9).$$

Les formules (1) à (9) s'appliquent à un état d'équilibre quelconque ; s'il s'agit de l'équilibre limite, on a :

$$n = m \sin\varphi \qquad (10).$$

Si on tire n et m des équations (7), (8), (9), l'équation (10) élevée au carré devient :

$$\frac{1}{4}\left(p_{xx} - p_{yy}\right)^2 + p_{xy}^2 = \frac{1}{4}\left(p_{yy} + p_{xx}\right)^2 \sin^2\varphi \qquad (11).$$

100. *Démonstration analytique.* — Nous avons déduit les formules précédentes des propriétés des figures 59 et 60. On peut aussi les établir par l'analyse.

Menons par le point conconsidéré A (fig. 61) des parallèles Ax, Ay aux axes coordonnés supposés rectangulaires. Nous déterminerons l'orientation d'une facette AD par l'axe θ qu'elle fait avec avec l'angle des y ; cet angle θ est aussi l'angle de la normale avec l'axe des x. Soient : P, p_x , p_y les pressions sur les facetttes AD, Ay, Ax; les projections de ces pressions sur les axes coordonnés seront désignées par ces mêmes notations affectées de l'indice x ou y. Menons BC parallèlement à AD ; exprimons que les pressions sur le contour ABC se font équilibre.

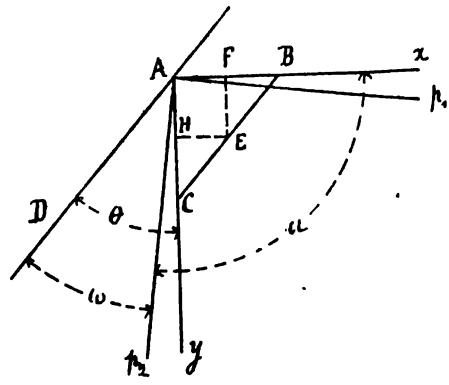

Fig. 61.

En prenant le point E milieu de BC comme centre de moment, on obtient :

$$p_{yx} \cdot \text{AB. EF} - p_{xy} \text{ AC. EH} = 0.$$

ou

$$p_{yx} = p_{xy}.$$

Supposons BC égal à l'unité ; les équations de translation donnent alors :

$$P_x = p_{xx} \cos\theta + p_{yx} \sin\theta,$$

$$P_y = p_{yy} \sin\theta + p_{xy} \cos\theta.$$

Les composantes normales et tangentielles de la pression ont pour valeur :

$$N = P_x \cos\theta + P_y \sin\theta,$$

$$T = - P_x \sin\theta + P_y \cos\theta.$$

ou bien :

$$N = \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} + \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \cos 2\theta + p_{xy} \sin 2\theta,$$

$$T = - \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \sin 2\theta + p_{xy} \cos 2\theta.$$

Nous pouvons alors poser les équations (7), (8), (9) du numéro précédent, en considérant m, n, u comme des quantités à déterminer. On trouve alors :

$$N = m + n \cos 2(\theta - u),$$

$$T = - n \sin 2(\theta - u).$$

Portons l'angle u en xAp_1 ; menons Ap_1 perpendiculairement à Ap_1. L'angle ω de la facette avec Ap_1 est donné par :

$$\omega = \theta - \left(u - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\theta - u = \omega - \frac{\pi}{2}.$$

Les valeurs de T et de N deviennent :

$$N = m - n \cos 2\omega,$$

$$T = n \sin 2\omega.$$

Les pressions normales s'obtiennent en égalant T à zéro, ce qui donne :

$$\omega = 0 \qquad p_1 = m - n,$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \qquad p_2 = m + n.$$

L'angle i que fait la pression avec la normale à la facette est donné par l'équation :

$$\operatorname{tang} i = \frac{T}{N} = \frac{n \sin 2\omega}{m - n \cos 2\omega}.$$

En chassant les dénominateurs, on obtient :

$$m \sin i = n \sin (2\omega + i).$$

Les valeurs maxima et minima de l'angle i s'obtiennent en posant :

$$2\omega + i = \pm \frac{\pi}{2},$$

$$m \sin i = \pm n.$$

Ces valeurs de i sont égales et de signe contraire ; soit φ la valeur maxima ; on a :

$$m \sin \varphi = n \qquad (10).$$

Les valeurs de ω sont :

$$\omega = \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

S'il s'agit de l'équilibre limite, l'angle φ est donné, l'équation (10) est une équation de condition qu'on peut mettre sous la forme de l'équation (11) du numéro précédent.

§ 2. VARIATION DES PRESSIONS DANS LE PLAN.

101. *Équations du problème.* — Prenons pour axes coordonnés un axe horizontal Ox et un axe vertical Oy. Soient (fig. 62) : x, y les coordonnées d'un point quelconque A ; en donnant à x, y des accroissements dx, dy, nous construirons un rectangle infiniment petit ABCD ; nous considérons ce rectangle comme la section de symétrie d'un prisme dont les arêtes ont une longueur égale à l'unité et nous exprimons l'équilibre de translation de ce prisme ; on obtient l'équation vectorielle :

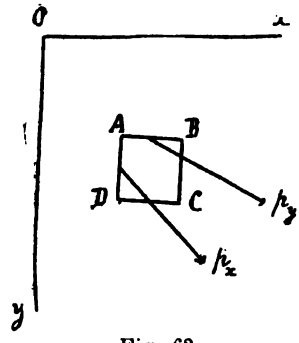

Fig. 62.

$$-\frac{\partial \overline{p_x}}{\partial x} dxdy - \frac{\partial \overline{p_y}}{\partial y} dydx + \overline{\Pi}\, dydx = 0.$$

En projetant sur les deux axes coordonnés, on trouve :

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (12),$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial x} = \varphi \qquad (13).$$

On introduit d'abord les pressions moyennes sur les différentes faces ; le symbole ∂ signifie un accroissement. En passant à la limite, on reconnait que les pressions deviennent les pressions au point A et que le symbole ∂ devient un symbole de différentiation.

Les équations (12) et (13) sont à trois fonctions inconnues ; il y a donc indétermination. Nous avons vu que l'angle i formé par la pression et la normale à la facette variait entre deux valeurs limites $\pm \varphi$ liées aux pressions par l'équation (11) :

$$\frac{1}{4}\left(p_{xx} - p_{yy}\right)^2 + p_{xy}^2 = \frac{1}{4}\left(p_{xx} + p_{yy}\right)^2 \sin^2\varphi \qquad (11).$$

On pourrait prendre pour φ une fonction quelconque de (x, y) pourvu que cette fonction ne dépasse pas l'angle du frottement des terres. Si on admet l'équilibre limite, φ est l'angle du frottement ; les équations (11) (12) et (13) déterminent le problème.

L'équation (11) est une équation finie ; on peut en tirer l'une des trois fonctions inconnues et en portant sa valeur dans les équations (12) et (13), on obtient deux équations linéaires aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues. Ces deux fonctions peuvent être représentées par deux surfaces associées ; il suffit de les porter en ordonnées suivant une perpendiculaire au plan des (x, y).

On sait qu'on peut se donner arbitrairement deux courbes associées initiales sur ces deux surfaces. Lorsque les courbes sont régulières, on obtient une solution développable par la formule de Taylor. Généralement les conditions initiales présentent des discontinuités, et les problèmes ont pour solution un ensemble de solutions régulières séparées par des caractéristiques.

102. *Massifs semblables.* — Etant un donné un massif de terre en équilibre limite, on peut immédiatement en trouver une infinité d'autres en faisant varier les coordonnées et les pressions dans un même rapport de similitude.

En effet, les équations (10) et (11) sont encore satisfaites après la transformation par homothéthie, car les dérivées partielles sont des limites de rapports dont les termes sont multipliés par le même nombre : ces dérivées partielles ne changent pas. Les pressions p_{xx}, p_{xy}, p_{yy} sont multipliées par ce même nombre ; donc l'équation (11) qui est homogène est encore satisfaite. Les trois équations du problème sont donc encore satisfaites.

103. *Solution conique.* — Il peut arriver qu'en prenant un certain centre de similitude, le massif de terres en équilibre se superpose à lui-même par une transformation homothétique. C'est ce qui a lieu quand les lignes initiales sont des droites partant du centre de similitude. Citons, par exemple, le cas d'un mur plan AB (fig. 63) soutenant des terres limitées par un plan AC.

Un point quelconque M a pour homologue un point M' et les pressions de M en M' varient dans le rapport de similitude qui est le rapport AM : AM'. Comme cela est vrai, quel que soit ce rapport, on en conclut que, le long d'une droite AM passant par A, les pressions sont représentées par des lignes droites passant par A et projetées sur AM; les surfaces qui représentent p_{xx}, p_{xy}, p_{yy}, sont des surfaces coniques.

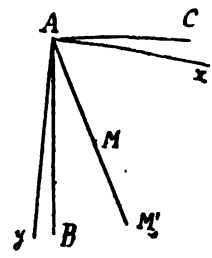

Fig. 63.

On peut alors prendre pour variable :

$$t = \frac{y}{x},$$

poser

$$p_{xx} = ax, \qquad p_{xy} = bx, \qquad p_{yy} = cx,$$

a, b, c étant fonctions de t ; les équations deviennent :

$$a - t\frac{da}{dt} + \frac{db}{dt} = 0 \tag{14},$$

$$b - t\frac{db}{dt} + \frac{dc}{dt} = \text{II} \tag{15},$$

$$(a - c)^2 + 4b^2 = (a + c)^2 \sin^2\varphi \tag{16}.$$

On est ramené à deux équations différentielles ordinaires. Ces équations peuvent être transformées ; on peut même éliminer la variable t en introduisant les différentielles secondes. Mais il paraît difficile de les intégrer.

104. *Solution plane ou linéaire.* — Supposons le massif de terre limité supérieurement par un plan indéfini. En prenant un point O (fig. 64) à la surface comme centre de similitude, on se trouve dans le cas du numéro précédent. Mais on peut prendre un autre point O' comme centre de similitude ; on en conclut que les surfaces qui représentent les pressions sont des plans, car ce sont des cônes qui ont le point O pour sommet et pour directrices des droites passant par O'. C'est ce que nous allons vérifier par l'analyse.

Prenons le point O comme origine des axes rectangulaires ox, oy ; soit :

$$y + x \operatorname{tang} i = o$$

l'équation de la ligne droite qui limite la section du massif ; posons :

$$p_{xx} = p'_{xx}\,(y + x \operatorname{tang} i),$$

$$p_{xy} = p'_{xy}\,(y + x \operatorname{tang} i),$$

$$p_{yy} = p'_{yy}\,(y + x \operatorname{tang} i).$$

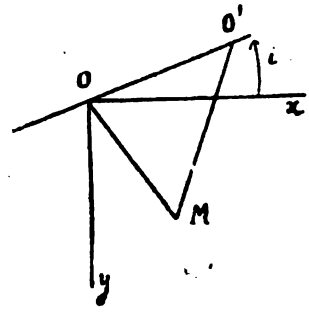

Fig. 64.

En remplaçant ces quantités par leurs valeurs dans les équations (12) (13) et (11), on trouve :

$$p'_{xx} \operatorname{tang} i + p'_{xy} = o \qquad (17),$$

$$p'_{xy} \operatorname{tang} i + p'_{yy} = \Pi \qquad (18),$$

$$\frac{1}{4}\left(p'_{xx} - p'_{yy}\right)^2 + p'^2_{xy} = \frac{1}{4}\left(p'_{xx} + p'_{yy}\right)^2 \sin^2\varphi \qquad (19).$$

On satisfait à ces trois équations en les résolvant par rapport à p'_{xx}, p'_{yy}, p'_{xy} ; on trouve :

$$p'_{xy} = - p'_{xx} \operatorname{tang} i,$$

$$p'_{yy} = \Pi + p'_{xx} \operatorname{tang}^2 i,$$

$$p_{xx} = \Pi \frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}\left[\cos 2i + \sin^2\varphi \pm \sqrt{(1 + \cos 2i)(\cos 2i - \cos 2\varphi)}\right.$$

On trouve deux solutions réelles lorsque l'angle i est plus petit que φ ; en prenant la plus petite pression, on trouve l'état d'équilibre limite où les terres sont sur le point de glisser vers le bas. En prenant la plus grande pression, on trouve l'état d'équilibre limite où les terres sont sur le point de glisser vers le haut ; c'est l'état d'équilibre qu'il faut considérer dans l'évaluation de la butée des terres.

105. *Démonstration géométrique. Epure circulaire.* — Soit (fig. 65) AB la droite qui limite supérieurement le massif de terre ;

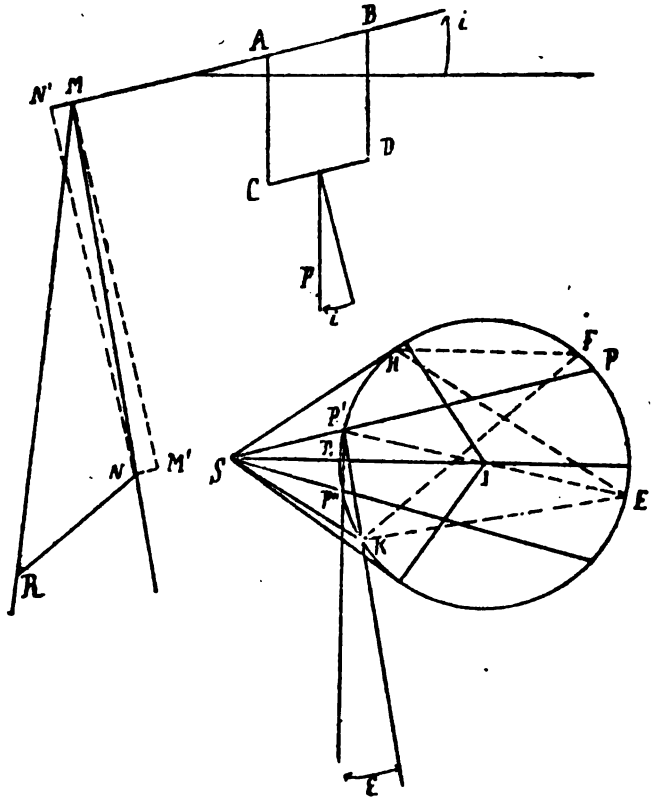

Fig. 65

menons CD parallèlement à AB ; tirons les verticales AC et BD et exprimons que le volume ABCD est en équilibre. On peut admettre comme évident que les pressions sur AC et BD sont égales et de sens contraire. Il doit donc en être de même du poids du volume ABDC

et de la pression sur CD. On déduit de là que la pression en C, à une profondeur

$$h = AC,$$

sur une facette parallèle à la surface supérieure, est verticale et a pour valeur :

$$P = \Pi\, h \cos i.$$

L'épure circulaire permet alors de trouver toutes les pressions. On doit construire l'angle i en PSI ; il suffit pour cela de mener SP parallèlement à la surface du terrain. Nous prendrons alors SP pour représenter la pression P ; la pression conjuguée, qui est la pression sur la facette CA, sera représentée par SP' en grandeur seulement. Nous obtiendrons le pôle des facettes en menant par P une parallèle à la facette CD ; on trouve P' ; ce pôle s'obtient donc en menant SP' parallèlement à la surface du terrain. S'il s'agissait de la butée, on prendrait SP' pour représenter la pression verticale ; la pression latérale serait représentée par SP.

Proposons-nous de chercher la poussée des terres sur le mur MN en admettant l'état d'équilibre étudié précédemment. Menons, par le pôle P' des facettes, une parallèle P'K à la face du mur ; la pression en N sera représentée par SK. Cette pression doit faire avec la normale au mur un angle égal à — ISK. On obtient facilement la normale au mur en KE ; on construit un angle EHF' égal à l'angle ISK, en menant la droite EH parallèle à KS, et la droite HF parallèle à SI ; la droite KF donne la direction de la pression. Nous pouvons choisir le point N de telle façon que :

$$NN' = SP,$$

NN' étant la perpendiculaire abaissée de N sur la surface du terrain ; la pression verticale en N est :

$$P = \Pi\, h \cos i = \Pi\, NN'.$$

L'échelle des pressions en N est déterminée par la condition que la pression Π NN' est représentée par SP ou NN' ; c'est-à-dire que les pressions sont représentées par les hauteurs des colonnes de terre qui réaliseraient ces pressions. Si on porte SK en NR, suivant une parallèle à KF, toutes les pressions sur le mur MN, représentées à l'échelle dont il vient d'être question, ont leurs extrémités sur la droite MR.

Cette construction ne donne pas, en général, l'état d'équilibre

limite, car si le mur cède, les terres glissent sur le mur ; au moment où le mouvement est sur le point de se produire, la pression sur le mur doit donc faire avec la normale un angle φ_1 égal à l'angle du frottement des terres sur le mur ; c'est donc seulement dans le cas où

$$KSI = \varphi_1$$

que le problème est résolu exactement. Généralement, l'angle du frottement des terres sur le mur est égal ou plus grand que φ ; il faut alors prendre

$$\varphi_1 = \varphi.$$

On peut réaliser cette condition en déterminant convenablement la face intérieure du mur de soutènement. On porte l'angle φ_1 en KSI ; la droite P'K donne la direction de cette face.

106. *Formules.* — On peut remplacer les constructions précédentes par des formules ; on retrouve les formules établies par M. Maurice Lévy (1). Il suffit de résoudre les triangles SIP et SIK. Dans le triangle SIP, on connait le côté SP ou P, l'angle PSI ou i, et le rapport sin φ des côtés IP et SI.

Représentons par α l'angle SPI ; on trouve facilement :

$$\sin \alpha = \frac{\sin i}{\sin \varphi},$$

$$SI = \frac{P \sin \alpha}{\sin (\alpha + i)}.$$

Dans le triangle SIK, on connait l'angle S qui est φ_1 et les côtés SI et IK dont le rapport est sin φ ; on trouve :

$$\sin K = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi}.$$

(1) *Journal de Liouville*, 1873, page 299. Mémoire déjà cité.

On peut déduire de là l'angle ε du mur avec la verticale ; menons la verticale P' P'', on a :

$$SIK = SIP'' + P''IK = \alpha - i + 2\varepsilon.$$

Or

$$SIK = \pi - \varphi_1 - K.$$

En égalant ces deux valeurs, on trouve :

$$\pi - K = \alpha - i + 2\varepsilon + \varphi_1.$$

Ayant déterminé l'angle K, on tire ε de cette équation ; on peut aussi éliminer K et écrire :

$$\sin(\alpha - i + 2\varepsilon + \varphi_1) = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}.$$

Dans le même triangle SIK, on tire la pression SK ou R par la formule

$$R = SI\ \frac{\sin(K + \varphi_1)}{\sin K} = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha + i)}\ \frac{\sin(K + \varphi_1)}{\sin K}.$$

Prenons le cas où φ_1 est égal à φ ; on trouve :

$$2\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varphi - (\alpha - i),$$

$$R = \frac{P\sin\alpha\cos\varphi}{\sin(\alpha + i)}.$$

Si on se donne l'angle ε à priori, on peut encore appliquer la solution linéaire, si l'on se contente d'une solution approchée ; on doit alors calculer φ_1 et considérer l'angle SIK comme connu. On applique la formule :

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{K - S}{2}}{\operatorname{tang}\frac{K + S}{2}} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

On connaît I ou K + S ; on calcule K — S, on en déduit S ou φ_1. On peut aussi éliminer K de cette équation, qui alors ne contiendra plus que l'inconnue.

§ 3. CARACTÉRISTIQUES.

107. *Caractéristiques d'ordre zéro.* — Reprenons les équations (12) (13) et (10) du numéro 101. En tirant p_{xx} de l'équation (11) et substituant dans l'équation (12), nous aurons deux équations à deux fonctions inconnues ; pour éviter les radicaux, nous éliminerons seulement la dérivée de p_{xx}, nous conserverons p_{xx} qui sera censé exprimé en fonction des deux autres pressions. En prenant la dérivée de l'équation (11) par rapport à x, on a :

$$A\frac{\partial p_{yy}}{dx} + B\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + C\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = 0.$$

Nous avons posé :

$$A = -\frac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) - \frac{1}{2}(p_{xx} + p_{yy})\sin^2\varphi,$$

$$B = 2p_{xy},$$

$$C = \frac{1}{2}\left(p_{xx} - p_{yy}\right) - \frac{1}{2}\left(p_{xx} + p_{yy}\right)\left(\sin^2\varphi.\right.$$

En éliminant la dérivée de p_{xx} de l'équation (12), on a :

$$B\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + A\frac{\partial p_{yy}}{\partial x} - C\frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (12)^{bis}.$$

Nous suivrons alors la méthode expliquée au numéro 31 ; nous nous donnerons les fonctions inconnues p_{xy} et p_{yy} le long d'une courbe ; cela revient à se donner deux courbes initiales associées sur les surfaces qui représentent ces fonctions. Nous écrirons alors les équations qui permettent de calculer les quatre dérivées des fonctions inconnues. On trouve :

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}dx + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y}dy = dp_{xy},$$

$$\frac{\partial p_{yy}}{\partial x}dx + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y}dy = dp_{yy}$$

$$B\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} - C\frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + A\frac{\partial p_{yy}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = \Pi.$$

Ces équations linéaires permettent de calculer les quatre dérivées premières des fonctions inconnues. Voyons s'il est possible de former une solution irrégulière en réunissant deux solutions régulières séparées par une ligne de discontinuité dans les dérivées premières. En prenant cette ligne de discontinuité comme courbes initiales, on doit trouver deux solutions différentes ; il faut pour cela que les équations linéaires qui donnent les dérivées soient indéterminées ; on exprimera cette indétermination en égalant à zéro deux des déterminants de la matrice suivante :

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 & 0 & dp_{xy} \\ 0 & 0 & dx & dy & dp_{yy} \\ B & -C & A & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \Pi \end{vmatrix}.$$

On peut aussi exprimer qu'en ajoutant les équations multipliées respectivement par les coefficients indéterminés α, β, γ et 1, on obtient une identité ; on trouve :

$$\alpha\, dx + \gamma\, B + 1 = 0,$$

$$\alpha\, dx - C\,\gamma = 0,$$

$$\beta\, dx + A\,\gamma = 0,$$

$$\beta\, dy + 1 = 0,$$

$$\alpha\, dp_{xy} + \beta\, dp_{yy} + \Pi = 0.$$

De la seconde, troisième et quatrième, on tire :

$$\beta = -\frac{1}{dy},\quad \gamma = \frac{dx}{A\,dy},\quad \alpha = \frac{C\,dx}{A\,dy^2}.$$

En portant ces valeurs dans la première et la dernière, on trouve les deux équations de la caractéristique :

$$A\,dy^2 + B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0.$$

$$\frac{C\,dx}{A\,dy^2}\,dp_{xy} - \frac{dp_{yy}}{dy} + \Pi = 0.$$

De la première, on tire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\,B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Nous avons écrit plus haut les valeurs de A, B, C ; on en déduit :

$$B^2 - 4AC = 4\,\dot{p}_{xy} + (p_{xx} - p_{yy})^2 - (p_{xx} + p_{yy})^2 \sin^2\varphi.$$

Nous retrancherons du second membre, l'expression suivante qui est égale à zéro d'après l'équation (11) :

$$0 = 4\,\dot{p}_{xy} + (p_{xx} - p_{yy})^2 - (p_{xx} + p_{yy})^2 \sin^2\varphi.$$

Nous obtenons :

$$B^2 - 4\,AC = (p_{xx} + p_{yy})^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi.$$

Il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\,p_{xy} \pm (p_{xx} + p_{yy}) \sin\varphi \cos\varphi}{-(p_{xx} - p_{yy}) - (p_{xx} + p_{yy}) \sin^2\varphi} \qquad (14).$$

Soient λ et μ les deux valeurs données par l'équation précédente ; on a :

$$\lambda\,\mu = \frac{C}{A}.$$

Prenons la première valeur ; la seconde équation de la première caractéristique se transforme en remarquant que

$$\frac{C\,dx}{A\,dy} = \frac{\lambda\,\mu}{\lambda} = \mu.$$

On trouve finalement pour les équations de la première caractéristique :

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \qquad (15),$$

$$dp_{yy} - \mu dp_{xx} = \Pi dy \qquad (16).$$

On trouve de même que les équations de la seconde caractéristique sont :

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \mu \qquad (17),$$

$$\delta p_{yy} - \lambda \delta p_{xy} = \pi \delta y \qquad (18).$$

108. *Equation de Maurice Lévy.* — M. Maurice Lévy a ramené le problème de la poussée des terres à l'intégration d'une équation unique du second ordre aux dérivées partielles. On l'obtient en remarquant que les équations (12) et (13) sont satisfaites en posant :

$$p_{xx} = \frac{d^2\psi}{dy^2}, \quad p_{xy} = -\frac{d^2\psi}{dx\,dy}, \quad p_{yy} = \Pi y + \frac{d^2\psi}{dx^2}.$$

On ne diminue pas la généralité des équations (12) et (13), car on peut toujours mettre la valeur de p_{xx} sous la forme indiquée ; on trouve les deux autres pressions en intégrant les équations (12) et (13) ; on reconnait facilement que les constantes d'intégration qui sont des fonctions de x seul ou de y seul modifient seulement la fonction ψ.

Portons les valeurs des pressions dans l'équation (11) et désignons par r, s, t, les dérivées secondes de la fonction ψ ; on trouve :

$$\frac{1}{4}(t - r - \Pi y)^2 + s^2 - \frac{1}{4}(t + r + \Pi y)^2 \sin^2\varphi = 0.$$

Nous avons trouvé au numéro 29 les caractéristiques d'une équation de cette forme ; on écrit :

$$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0.$$

Soient λ et μ les racines de cette équation du second degré ; les équations de la première caractéristique sont :

$$dy = \lambda\,dx,$$
$$dr + \mu\,ds = 0.$$

On obtient l'autre caractéristique en permutant λ et μ.

On trouve :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2s \pm (t + r + \Pi y)\sin\varphi\cos\varphi}{-(t - r - \pi y) - (t - r + \Pi y)\sin^2\varphi}.$$

On peut appliquer la méthode d'intégration approchée du numéro 30 ; mais on remarquera qu'il est inutile de calculer ψ et les dérivées premières de ψ ; il suffit de calculer r, s, t. On peut même revenir aux variables p_{rx}, p_{xy}, p_{yy} et on retrouve les équations du numéro précédent.

109. *Changement de variable.* — Nous avons, au numéro 99, établi les équations :

$$p_{xx} = m + n \cos 2u \tag{3},$$

$$p_{xy} = n \sin 2u \tag{4},$$

$$p_{yy} = m - n \cos 2u \tag{5},$$

$$n = m \sin \varphi \tag{6}.$$

Nous prendrons, comme fonctions inconnues nouvelles, l'angle u que forme la pression maxima avec l'axe des x et la pression p sur la facette de glissement. Cette pression est représentée par la tangente AQ de la figure 60 ; on a :

$$n = m \sin \varphi = p \operatorname{tang} \varphi.$$

Les équations (3) (4) et (5) deviennent :

$$p_{xx} = \frac{p}{\cos \varphi} + p \operatorname{tang} \varphi \cos 2u \tag{3'}.$$

$$p_{xy} = p \operatorname{tang} \varphi \sin 2u \tag{4'},$$

$$p_{yy} = \frac{p}{\cos \varphi} - p \operatorname{tang} \varphi \cos 2u \tag{5'}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (16) ; on trouve :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2u \pm \cos \varphi}{\cos 2u + \sin \varphi}.$$

Posons :

$$2a = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2u \pm \sin 2a}{\cos 2u + \cos 2a} = \operatorname{tang} (u \pm a).$$

Il résulte de là que les tangentes aux deux caractéristiques forment avec la pression maxima des angles égaux mais de signe contraire ; la valeur absolue de ces angles est :

$$a = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

Cette formule est précisément celle qui détermine les facettes de glissement (96) ; on voit donc que les caractéristiques sont les lignes de glissement ; l'angle aigu qu'elles forment est $2a$ ou le complément de φ ; la bissectrice de cet angle est la direction de la pression maxima. Nous aurons donc :

$$\lambda = \text{tang } (u - a) \qquad \mu = \text{tang } (u + a)$$

Introduisons les nouvelles variables dans l'équation (16) que nous mettrons d'abord sous la forme :

$$\cos (u + a)\, dp_{yy} - \sin (u + a)\, dp_{xy} = \Pi\, dy \cos (u + a)$$

On trouve après réductions :

$$\frac{dp}{\cos \varphi} \cos (u + a) - dp \text{ tang } \varphi \cos (u - a) + 2p \text{ tang } \varphi \sin (u - a)\, du = \Pi\, dy \cos (u + a)$$

Remarquons que :

$$u + a = u - a + 2a \quad , \quad 2a = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\text{Cos } (u + a) = \cos (u - a) \sin\varphi - \sin (u - a) \cos \varphi$$

Substituons, divisons l'équation par $\sin (u - a)$ et changeons le signe, nous aurons :

$$dp - 2p \text{ tang } \varphi\, du = - \Pi \frac{\cos (u + a)}{\sin (u - a)}\, dy$$

Désignons par ds l'arc élémentaire de la première caractéristique ; on a :

$$dy = ds \sin (u - a)$$

Le second membre de l'équation de la caractéristique devient :

$$- \Pi \frac{\cos (u + a)}{\sin (u - a)} dy = - \Pi ds \cos (u + a)$$

Menons par l'origine des axes ou un point quelconque du plan, les directions OT_1 et OT_2 des deux talus naturels. Appelons y_1 et y_2 les distances d'un point quelconque du plan à ces deux lignes OT_1 et OT_2 ; ces distances seront affectées du signe + si ce point se trouve en dessous des talus naturels. L'expression $ds \cos (u + a)$ représente la projection

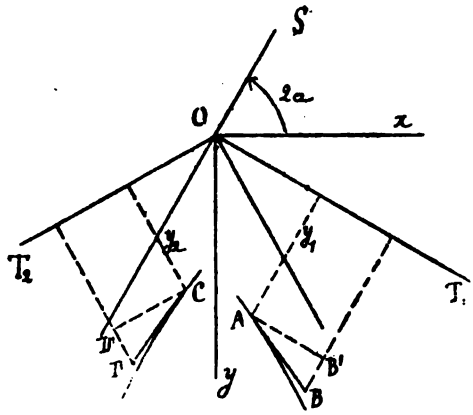

Fig. 66

de l'arc élémentaire AB sur l'axe OS faisant avec ox un angle $— 2a$; car cet arc élémentaire fait avec ox, un angle $u - a$ et avec OS un angle

$$u — a + 2a = u + a.$$

La projection de l'arc ds ou AB sur OS prolongé est précisément BB' ou dy_1 ; elle est égale et de signe contraire à la projection sur OS ; on a donc :

$$dy_1 = — ds \cos (u + a).$$

On trouve finalement que les deux équations de la première caractéristique sont :

$$dy = dx. \text{ tang } (u — a) \qquad (19),$$

$$dp — 2p. \text{ tang } \varphi \, du = \Pi dy_1 \qquad (20),$$

$$dy_1 = — ds \cos (u + a).$$

Nous pouvons appliquer tous ces calculs à la seconde caractéristique ; les équations (17) et (18) s'écrivent d'abord :

$$\delta y = \delta x \text{ tang } (u + a),$$

$$\delta p_{yy} \cos (u — a) — \delta p_{xy} \sin (u — a) = \pi \delta y \cos (u — a).$$

En exprimant les différentielles des pressions au moyen des nouvelles variables, on trouve après réductions :

$$\frac{\partial p}{\cos\varphi}\cos(u-a) - \partial p \operatorname{tang}\varphi \cos(u+a) + 2p \operatorname{tang}\varphi \sin(u+a) = \pi\, \partial y \cos(u-a).$$

Remarquons que :

$$u - a = u + a - 2a, \qquad 2a = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$\cos(u-a) = \cos(u+a)\sin\varphi + \sin(u+a)\cos\varphi.$$

Substituons et divisons par $\sin(u+a)$, il vient :

$$\partial p + 2p \operatorname{tang}\varphi\, \partial u = \pi\, \partial y \frac{\cos(u-a)}{\sin(u+a)}.$$

Appelons $\partial\sigma$ l'arc élémentaire de la seconde caractéristique ; on a :

$$\partial y = \partial\sigma \sin(u+a),$$

$$\Pi\, \partial y \frac{\cos(u-a)}{\sin(u+a)} = \Pi\, \partial\sigma \cos(u-a) = \Pi\, \partial y_1.$$

Les équations de la seconde caractéristique sont donc :

$$\partial y = \partial x \operatorname{tang}(u+a) \qquad (21),$$

$$\partial p + 2p \operatorname{tang}\varphi\, \partial u = \Pi\, \partial y_1 \qquad (22),$$

$$\partial y_1 = \partial\sigma \cos(u-a).$$

Il est utile de remarquer que pour passer de l'une à l'autre caractéristique, il faut changer le signe de a et le signe de Π.

Si nous examinons les équations (20) et (22), nous voyons que la différentielle de la pression le long d'une caractéristique dépend de deux causes : le poids des terres et la courbure de la caractéristique.

Si les caractéristiques étaient rectilignes, les différentielles et accroissements de la pression s'exprimeraient par :

$$\Pi\, dy_1, \qquad \Pi\, \Delta y_1,$$
$$\Pi\, dy_1, \qquad \Pi\, \Delta y_1.$$

Si le poids des terres était nul (ou négligeable à cause des fortes pressions et d'une grande courbure), on aurait :

$$dp = 2p \operatorname{tang}\varphi \, du, \qquad p = p_0 e^{2(u-u_0)\operatorname{tang}\varphi}$$

$$\partial p = -2p \operatorname{tang}\varphi \, \partial u, \qquad p = p_0 e^{-2(u-u_0)\operatorname{tang}\varphi}$$

Le long de la première caractéristique, la pression croît selon qu'elle présente une courbure dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ou en sens contraire. C'est l'inverse qui se produit le long de la seconde caractéristique.

110. *Transformation des équations aux dérivées partielles.*— Nous avons démontré (32) que le problème est résolu quand on sait construire les deux systèmes de caractéristiques, et que, des équations des caractéristiques, on peut déduire les équations aux dérivées partielles. Nous pouvons donc déduire des équations (20) et (22), les deux équations aux dérivées partielles qui déterminent les fonctions p et u.

Ecrivons l'équation (20) sous la forme :

$$\frac{dp}{ds} - 2p \operatorname{tang}\varphi \frac{du}{ds} + \Pi \cos(u + a) = 0.$$

Or

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x}\cos(u-a) + \frac{\partial p}{\partial y}\sin(u-a),$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(u-a) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(u-a),$$

Il vient donc :

$$\frac{\partial p}{\partial x}\cos(u-a) + \frac{\partial p}{\partial y}\sin(u-a) - 2p \operatorname{tang}\varphi \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(u-a) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(u-a)\right] + \Pi \cos(u+a) = 0 \qquad (23).$$

On trouve de même que l'équation (22) donne :

$$\frac{dp}{dx}\cos(u+a)+\frac{dp}{dy}\sin(u+a)+2p\,\text{tang}\,\varphi\left[\frac{du}{dx}\cos(u+a)+\frac{du}{dy}\sin(u+a)\right]-\Pi\cos(u-a)=0 \qquad (24).$$

On peut se proposer de déduire ces nouvelles équations des équations (12) et (13) ; il suffit d'y remplacer les pressions par leurs valeurs tirées des équations (3') (4') et (5'). On trouve d'abord :

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{dp}{dx}+\text{tang}\,\varphi\left(\frac{dp}{dx}\cos 2u+\frac{dp}{dy}\sin 2u-2p\sin 2u\frac{du}{dx}+2p\cos 2u\frac{du}{dy}\right)=0,$$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{dp}{dy}+\text{tang}\,\varphi\left(\frac{dp}{dx}\sin 2u-\frac{dp}{dy}\cos 2u+2p\cos 2u\frac{du}{dx}+2p\sin 2u\frac{du}{dy}\right)-\Pi=0.$$

Représentons respectivement par X et par Y les premiers membres de ces deux équations et écrivons :

$$X\sin(u+a)-Y\cos(u+a)=0,$$
$$-X\sin(u-a)+Y\cos(u-a)=0.$$

Les termes qui contiennent l'angle $2u$ subissent d'abord des réductions importantes ; il y a ensuite des réductions qui résultent de ce que l'angle φ est le complément de $2a$; on retrouve finalement les équations (23) et (24).

111. *Démonstration directe.* — La simplicité des équations des caractéristiques semble indiquer qu'il doit être possible de les obtenir rapidement par une démonstration directe. Soient (fig. 67) :

$$ds = AB, \quad d\sigma = AC,$$

deux arcs infiniment petits de la première et de la seconde ligne de glissement passant par A. Nous pouvons construire sur ces deux arcs

un parallélogramme curviligne en transportant, par un mouvement de translation AC en BD' et AB en CD'. On remarquera que BD' et CD' ne se confondent pas avec les lignes de glissement BD et CD.

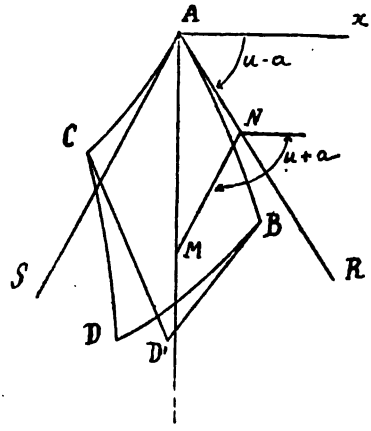

Figure 67.

Nous pouvons considérer la figure ABD'C comme la section de symétrie d'un prisme d'une longueur égale à l'unité et exprimer l'équilibre de translation de ce prisme. Tous les termes des équations seront de l'ordre $ds\,d\sigma$; nous pouvons diviser par $ds\,d\sigma$ et passer à la limite. Nous arriverons au même résultat en prenant les limites relatives de l'ordre $ds\,d\sigma$ ou en supprimant les infiniment petits d'ordre supérieur. Il n'y a pas lieu d'introduire les pressions sur les faces parallèles au plan de la figure : elle se font directement équilibre. Nous devons considérer trois forces : le poids du prisme, la résultante des pressions sur les faces AC et BD', la résultante des pressions sur les faces AB et CD'.

La limite relative du poids du prisme est évidemment

$$\Pi\, ds\, d\sigma \sin 2a.$$

Décomposons cette force suivant les tangentes AR et AS aux lignes de glissement ; les composantes AN et NM sont données par les équations :

$$\frac{AN}{-\cos(u+a)} = \frac{MN}{\cos(u-a)} = \frac{\Pi\, ds\, d\sigma \sin 2a}{\sin 2a},$$

d'où :

$$AN = -\Pi\, ds\, d\sigma \cos(u+a),$$
$$MN = \Pi\, ds\, d\sigma \cos(u-a).$$

Nous devons calculer la résultante de translation des pressions sur les faces égales et parallèles AC et BD'. Il suffit de composer les pressions par unité de surface et de répartir la résultante sur l'arc $d\sigma$. Nous désignons par p la pression en A sur les faces de glissement ; en B, cette pression sera :

$$p' = p + dp + \ldots$$

Nous devons introduire en B la pression sur la face BD′ et non sur la face BD ; il faut faire tourner autour de B la seconde face de glissement d'un angle

$$-\Delta u = -du + \dots$$

Au moyen de l'épure circulaire, on reconnaît que la pression qu'il faut introduire en B sur BD′ est :

$$p'' = p' - 2p' \operatorname{tang} \varphi \, du + \dots = p + dp - 2p \operatorname{tang} \varphi \, du + \dots$$

Cette pression fait avec la normale à la facette un angle i qui diffère de φ d'un angle du second ordre ; la résultante des pressions par unité de surface en A et en B est donc :

$$dp - 2p \operatorname{tang} \varphi \, du + \dots$$

suivant AR et une composante d'ordre supérieur suivant AS.

En intégrant dans l'étendue de $d\sigma$ et en passant aux limites relatives, on obtient :

$$(dp - 2p \operatorname{tang} \varphi \, du) \, d\sigma.$$

On trouve de même que les pressions sur AB et CD′ se composent, aux limites relatives, en une force dirigée suivant SA et égale à

$$(\partial p + 2p \operatorname{tang} \varphi \, \partial u) \, ds.$$

En exprimant l'équilibre des composantes suivant AR et suivant AS, on retrouve :

$$dp - 2p \operatorname{tang} \varphi \, du = -\Pi \, ds \cos(u + a),$$

$$\partial p - 2p \operatorname{tang} \varphi \, \partial u = -\Pi \, \partial\sigma \cos(u - a).$$

112. *Caractéristique du premier ordre.* — Le long d'une caractéristique, les dérivées ou les plans tangents sont indéterminés ; mais si on donne ces dérivées en un point initial, on peut les trouver en tous les points au moyen d'une équation différentielle. Nous avons, au numéro 36, indiqué deux méthodes pour établir cette équation différentielle. Nous appliquerons la seconde de ces méthodes ; elle consiste à utiliser les équations (23) et (24) déduites des équations de la caractéristique d'ordre zéro.

Désignons le premier membre de l'équation (23) par F ; prenons la dérivée de cette équation par rapport à x et multiplions par

$$\frac{dx}{\cos(u-a)} = \frac{dy}{\sin(u-a)}.$$

On trouve :

$$d\frac{\partial p}{\partial x} - 2p \operatorname{tang} \varphi \, d\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{dF}{dx}\right)\frac{dx}{\cos(u-a)} = 0 \quad (25).$$

Nous avons posé :

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (26).$$

Nous supposons que les fonctions y, p, u sont connues le long de la caractéristique du premier système ; les quatre dérivées partielles des fonctions p et u satisfont à quatre équations linéaires ; il y a indétermination ; ces équations se réduisent à trois. Au moyen de ces trois équations, nous pouvons éliminer trois des dérivées et l'équation (25) deviendra une équation à une seule inconnue ; nous prendrons pour cette inconnue la dérivée de u par rapport à x.

Nous écrirons d'abord :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy,$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy,$$

$$dy = \operatorname{tang}(u-a)\,dx.$$

Nous en déduirons :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dp}{dy} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\cos(u-a)}{\sin(u-a)} \qquad (27),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dx} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\cos(u-a)}{\sin(u-a)} \qquad (28).$$

Portons ces valeurs dans l'équation (24) ; on obtient après quelques réductions :

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\cos\varphi}{\sin(u-a)}-2p\,\text{tang}\,\varphi\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\cos\varphi}{\sin(u-a)}-\Pi\cos(u+a)$$

$$+\left(\frac{dp}{dy}+2p\,\text{tang}\,\varphi\,\frac{du}{dy}\right)\sin(u+a)=o.$$

Or, on a :

$$\frac{dp}{dy}=2p\,\text{tang}\,\varphi\,\frac{du}{dy}-\Pi\,\frac{\cos(u+a)}{\sin(u-a)}.$$

Substituons et multiplions par

$$\frac{-\sin(u-a)}{\cos\varphi},$$

on trouve après quelques réductions :

$$\frac{\partial p}{\partial x}=2p\,\text{tang}\,\varphi\left(-\frac{\partial u}{dx}+2\,S\right)-\Pi\,\text{tang}\,\varphi\sin 2u \qquad (29).$$

Nous avons posé :

$$S=\frac{du}{dy}\,\frac{\sin(u-a)\sin(u+a)}{\cos\varphi} \qquad (30).$$

Nous allons maintenant calculer les différents termes de l'équation (25). Nous avons d'abord :

$$\frac{\partial F}{\partial u}=-\frac{\partial p}{\partial x}\sin(u-a)+\frac{\partial p}{\partial y}\cos(u-a)-2p\,\text{tang}\,\varphi$$

$$\left[-\frac{\partial u}{\partial x}\sin(u-a)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(u-a)\right]-\Pi\sin(u+a).$$

Nous éliminerons les dérivées partielles par rappport à y au moyen des équations (27) et (28) ; le terme des dérivées des pressions devient après réductions :

$$- \frac{1}{\sin(u-a)} \frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dy} \cos(u-a .$$

Le terme des dérivées de l'angle u devient de même

$$\frac{2p \text{ tang } \varphi}{\sin(u-a)} \frac{du}{dx} - 2p \text{ tang } \varphi \frac{du}{dy} \cos(u-a .$$

Rappelons que l'on a :

$$\frac{dp}{dy} = 2p \text{ tang } \varphi \frac{du}{dy} - \Pi \frac{\cos(u+a}{\sin(u-a)}.$$

On trouve :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{-1}{\sin(u-a)} \left(\frac{\partial p}{dx} - 2p \text{ tang } \varphi \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \Pi \frac{\sin \varphi}{\sin(u-a)}.$$

Remplaçons la dérivée de p par sa valeur tirée de l'équation (29) ; nous trouvons après quelques réductions :

$$\frac{1}{4 \text{ tang } \varphi} \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{p}{\sin(u-a)} \left(\frac{du}{\partial x} - S \right) - \frac{\Pi}{2} \cos(u-a).$$

On a ensuite :

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -2 \text{ tang } \varphi \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(u-a) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(u-a) \right]$$

Eliminons la dérivée partielle par rapport à y au moyen de l'équation (28), on a :

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -2 \text{ tang } \varphi \frac{du}{dy} \sin(u-a).$$

On peut alors calculer

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) \text{ ou } \left(\frac{dF}{dx}\right) \frac{1}{\cos(u-a)}.$$

On trouve :

$$\frac{1}{4 \operatorname{tang}\varphi}\left(\frac{dF}{dx}\right)\frac{1}{\cos(u-a)} = \frac{p\left(\frac{\partial u}{\partial x} - S\right)\frac{\partial u}{\partial x}}{\sin(u-a)\cos(u-a)}$$
$$+ \frac{\Pi}{2}\frac{\cos(u+a)}{\cos(u-a)}\frac{\partial u}{\partial x} - p \operatorname{tang}\varphi \frac{du}{dx}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} + 2S\right)$$
$$+ \frac{\Pi}{2}\operatorname{tang}\varphi \frac{du}{dx}\sin 2u.$$

Nous calculerons le premier terme de l'équation (24) en différentiant l'équation (29) suivant la caractéristique du premier système ; on a :

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial p}{\partial x} = 2p \operatorname{tang}\varphi\left(-\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{dS}{dx}\right)$$
$$+ 2\frac{dp}{dx}\operatorname{tang}\varphi\left(-\frac{\partial u}{\partial x} + S\right) - 2\Pi \operatorname{tang}\varphi \cos 2u \frac{du}{dx}.$$

Nous remplacerons dp par sa valeur :

$$dp = 2p \operatorname{tang}\varphi\, du - \Pi\, dy \frac{\cos(u+a)}{\sin(u-a)}.$$

L'équation (24), divisée par 4 tang φ, devient finalement :

$$p\left(-\frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dS}{dx}\right) + \frac{p\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - S\right)}{\sin(u-a)\cos(u-a)}$$
$$+ \Pi\frac{\cos(u+a)}{\cos(u-a)}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - S\right) + \Pi\frac{du}{dx}\frac{\sin(u-a)\cos(u-a)}{\cos\varphi} = 0$$

(31).

On obtient une formule analogue pour la seconde caractéris-

tique. Il n'est pas nécessaire de recommencer les calculs ; il suffit de changer le signe de a et de Π. On trouve :

$$p\left(-\frac{\delta}{\delta x}\frac{du}{dx}+\frac{\delta S}{\delta x}\right)+\frac{p\frac{du}{dx}\left(\frac{du}{dx}-S\right)}{\sin(u+a)\cos(u+a)}$$

$$-\Pi\frac{\cos(u-a)}{\cos(u+a)}\left(\frac{du}{dx}-S\right)+\Pi\frac{\delta u}{\delta x}\frac{\sin(u+a)\cos(u+a)}{\cos\varphi}=o \qquad (32).$$

113. *Variation de la courbure.* — Nous suivons toujours la première caractéristique, mais nous appelons γ la courbure au point considéré de la caractéristique de l'autre système ; nous proposons de chercher la variation de cette courbure. On a :

$$\gamma=\frac{\delta u}{\delta s}=\frac{du}{dx}\cos(u+a)+\frac{du}{dy}\sin(u+a).$$

Eliminons la dérivée par rapport à y par l'équation (28) ; on trouve :

$$\gamma=-\frac{du}{dx}\frac{\cos\varphi}{\sin(u-a)}+\frac{du}{dy}\sin(u+a).$$

D'où :

$$\frac{du}{dx}=S-\frac{\gamma\sin(u-a)}{\cos\varphi}.$$

Si, dans l'équation (31), nous remplaçons la dérivée de u par cette valeur, nous obtiendrons une équation différentielle qui donnera la variation de γ. On trouve, en la multipliant par $\cos\varphi$:

$$p\frac{d}{dx}\left[\gamma\sin(u-a)\right]-\frac{p\gamma}{\cos(u-a)}\left[S-\frac{\gamma\sin(u-a)}{\cos\varphi}\right]$$

$$-\Pi\frac{\cos(u+a)}{\cos(u-a)}\gamma\sin(u-a)+\Pi\frac{du}{dx}\sin(u-a)\cos(u-a)=o.$$

Remplaçons S par sa valeur et remarquons que

$$\frac{du}{dy}\sin(u-a)=\frac{du}{dx}\cos(u-a)=\frac{du}{ds}$$

En divisant par sin $(u - a)$, on obtient :

$$p\frac{d\gamma}{dx} + \frac{p\gamma^2}{\cos(u-a)\cos\varphi} - p\gamma\frac{du}{dx}\operatorname{tang}\varphi - \Pi\,\gamma\,\frac{\cos(u+a)}{\cos(u-a)} + \Pi\,\frac{du}{ds} = o.$$

Multiplions par dx ou $ds\cos(u-a$; nous trouvons :

$$p\,d\gamma + p\gamma^2\,\frac{ds}{\cos\varphi} - p\gamma\,du\operatorname{tang}\varphi - \Pi\,\gamma\,ds\cos(u+a) + \Pi\,du\cos(u-a) = o.$$

Appelons γ le rayon de courbure de la caractéristique du premier système ; divisons l'équation précédente par du ; nous trouverons :

$$p\frac{d\gamma}{du} + p\,\gamma^2\,\frac{r}{\cos\varphi} - \gamma\,[p\operatorname{tang}\varphi + \Pi\,r\cos(u+a)] + \Pi\cos(u-a) = o \qquad (33).$$

Nous pourrons établir une équation analogue en suivant la caractéristique du second système et en étudiant la variation de la courbure de la caractéristique du premier système. Il n'est pas nécessaire de recommencer les calculs ; il suffit de changer les signes de a et de Π ; on a, en appelant c la courbure de la première caractéristique et ρ le rayon de courbure de la seconde caractéristique :

$$p\frac{\partial c}{\partial u} - pc^2\,\frac{\rho}{\cos\varphi} + c\,[p\operatorname{tang}\varphi + \Pi\,\varphi\cos(u-a)] - \Pi\cos(u+a) = o \qquad (34).$$

114. *Démonstration par les différentielles.* — Au lieu de chercher la variation des dérivées partielles le long d'une caractéristique, on peut étudier la variation des différentielles relatives à l'autre caractéristique. Ainsi nous supposons connue une caractéristique du premier système ; nous prenons un élément $\partial\sigma$, ∂x, ∂y, ∂p, ∂u de l'autre caractéristique ; comment varient ces différentielles en suivant la première caractéristique.

Reprenons les équations des caractéristiques :

$$dp = 2p \operatorname{tang} \varphi \, du - \Pi \, ds \cos(u + \alpha),$$

$$\delta p = - 2p \operatorname{tang} \varphi \, \delta u + \Pi \, \delta\sigma \cos(u - \alpha).$$

Différentions la première par δ et la seconde par d ; on a :

$$\delta dp = 2p \operatorname{tang} \varphi \, \delta \, du + 2\delta p \operatorname{tang} \varphi \, du + \Pi \, ds \sin(u + \alpha) \, \delta u - \Pi \, \delta \, ds \cos(u + \alpha = o,$$

$$d\delta p = - 2p \operatorname{tang} \varphi \, d \, \delta u - 2dp \operatorname{tang} \varphi \, \delta u - \Pi \delta\sigma \sin(u - \alpha) \, \delta u + \Pi \, d \, \delta\sigma \cos(u - \alpha) = o.$$

On a évidemment :

$$\delta dp = d\delta p, \qquad \delta du = d\delta u.$$

Ecrivons :

$$\delta x = \delta\sigma \cos(u + \alpha), \qquad \delta y = \delta\sigma \sin(u + \alpha),$$

$$dx = ds \cos(u - \alpha), \qquad dy = ds \sin(u - \alpha).$$

En égalant les valeurs de $d\delta x$ et δdx ainsi que les valeurs de $d\delta y$ et δdy, on obtient deux nouvelles équations qui permettent de calculer $d\delta\sigma$ et δds ; on trouve après calculs et réductions :

$$d\delta\sigma = \frac{ds \, \delta u}{\cos \varphi} - \operatorname{tang} \varphi \, \delta\sigma \, du,$$

$$\delta ds = - \frac{\delta\sigma du}{\cos \varphi} + \operatorname{tang} \varphi \, ds \, \delta u.$$

Remplaçons ces quantités par leurs valeurs dans les deux équations qui donnent $d\delta p$ et $d\delta u$; remplaçons aussi dp et δp par leurs valeurs tirées des équations des caractéristiques ; si nous éliminons alors $d\delta p$, nous obtenons après calculs et réductions :

$$pd\delta u + \Pi \, \delta\sigma \, du \cos(u - \alpha) - \Pi \, ds \, \delta u \cos(u + \alpha) = o \quad (35).$$

Cette équation et celle qui détermine $d\delta\sigma$ permettent de calculer les fonctions δu et $\delta\sigma$; on peut appliquer la méthode de D'Alembert.

Mais nous nous contenterons d'en déduire les équations (33) et (34) qui donnent la variation des courbures. Soit γ la courbure de la seconde caractéristique ; on a :

$$\partial u = \gamma \partial \sigma,$$

$$d\partial u = d\gamma \partial \sigma + \gamma d\partial \sigma.$$

En remplaçant $d\partial\sigma$ par sa valeur, on obtient :

$$d\partial u = d\gamma\ \partial\sigma + \gamma\left(\frac{ds\partial u}{\cos\varphi} - \operatorname{tang}\varphi\ \partial\sigma\ du\right).$$

En substituant dans l'équation (35), on retrouve facilement l'équation (33) du numéro précédent. En posant :

$$du = c\ ds,$$

on retrouverait l'équation (34).

On peut introduire le rayon de courbure, au lieu de la courbure ; si on divise l'équation (33) par γ^2 et si on pose

$$\rho = \frac{1}{\gamma},$$

il vient :

$$-p\frac{d\rho}{du} - \rho\,[p\operatorname{tang}\varphi + \Pi r\cos(u+a)] + \rho^2\,\Pi\cos(u-a) + \frac{pr}{\cos\varphi} = o \qquad (36).$$

Divisons de même l'équation (34) par c^2 et posons :

$$r = \frac{1}{c}.$$

Il vient :

$$-p\frac{dr}{du} + r\,[p\operatorname{tang}\varphi + \Pi\rho\cos(u-a)] - r^2\,\Pi\cos(u+a) - \frac{p\rho}{\cos\varphi} = o \qquad (37).$$

On remarquera que toutes ces formules supposent que l'on donne à la courbure un signe qui dépend de du ou de ∂u.

115. *Intégration. Contour apparent.* — Si l'on examine les équations (31), (32), (33), (36) et (37), on reconnait qu'elles ont toutes la forme de l'équation :

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qy^2 = R.$$

On sait intégrer cette équation quand on en connait une solution y_1 ; on la ramène à une équation de Bernouilli réductible à la forme linéaire, en posant

$$z = y - y_1.$$

Si donc on connait une solution du problème de la poussée des terres, séparée d'une solution inconnue par une caractéristique, on pourra toujours, dans la solution inconnue et le long de cette caractéristique, trouver la variation des dérivées partielles ou de la courbure de l'autre caractéristique.

Nous avons vu au numéro 37 que les caractéristiques d'un système peuvent envelopper une courbe et que cette courbe est le contour apparent des surfaces qui représentent les fonctions inconnues. Nous avons montré aux numéros 83 et 84 que l'existence d'une surface hydraulique à plusieurs nappes annonce que la solution continue est impossible et doit être remplacée par une solution présentant une discontinuité finie ; le mascaret est une discontinuité de cette espèce. Le même phénomène peut se présenter dans la poussée des terres ; on obtiendra le point où la caractéristique touche le contour apparent en cherchant le point où les dérivées partielles deviennent infinies. On arrive au même résultat en cherchant le point où la courbure de l'autre caractéristique est infinie ; car nous avons vu au numéro 113 qu'il y a des relations linéaires qui donnent les dérivées partielles en fonction de cette courbure. Il est d'ailleurs évident que le contour apparent qui enveloppe la caractéristique d'un système est le lieu des points de rebroussements des caractéristiques de l'autre système.

Prenons, comme exemple, le cas d'une caractéristique rectiligne du premier système ; divisons l'équation (33) par r et posons

$$r\,du = ds \quad , \quad r = \infty ;$$

il vient

$$p\,\frac{d\gamma}{ds} + \frac{p\gamma^2}{\cos\varphi} - \gamma\,\Pi\cos(u + a) = o.$$

L'équation de la caractéristique du premier système donne, quand il s'agit d'une droite,

$$dp = -\Pi\, ds \cos(u + a),$$

$$p = -\Pi\, s \cos(u + a).$$

La constante d'intégration est nulle, si nous prenons, pour origine des s, le point où la pression est nulle. Remplaçons p par sa valeur dans l'équation précédente et simplifions ; nous trouvons :

$$s\frac{d\rho}{ds} + \gamma^2\frac{s}{\cos\varphi} + \gamma = 0.$$

Cette équation est satisfaite en prenant

$$\gamma = 0.$$

Cette valeur est facile à prévoir ; on peut toujours supposer que la caractéristique rectiligne limite une solution linéaire et la courbure des caractéristiques est alors égale à zéro.

Pour trouver les autres solutions de l'équation différentielle, nous prendrons le rayon de courbure ρ comme fonction inconnue ; nous obtiendrons après quelques transformations :

$$\frac{s\,d\rho - \rho\,ds}{s^2} = \frac{ds}{s\cos\varphi}$$

dont l'intégrale générale est :

$$\frac{\rho}{s} = \frac{\rho_0}{s_0} + \frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{s}{s_0}.$$

Nous avons appelé ρ_0 le rayon de courbure au point s_0. Nous obtiendrons le point où la caractéristique touche le contour apparent en posant :

$$\gamma = \infty \quad \text{ou bien} \quad \rho = 0.$$

On obtient :

$$s_1 = s_0\, e^{-\frac{\rho_0\cos\varphi}{s_0}}.$$

Soit (fig. 68) AB la caractéristique du premier système faisant partie de la solution linéaire construite sur l'angle CAM. On donne la caractéristique DE du second système et l'on construit la solution déterminée par les deux caractéristiques DH et DE. Le rayon de courbure ρ_0 au point D est négatif ; donc on trouve

$$s_1 = s_0\, e^{-\frac{\rho_0 \cos\varphi}{s_0}} > s_0.$$

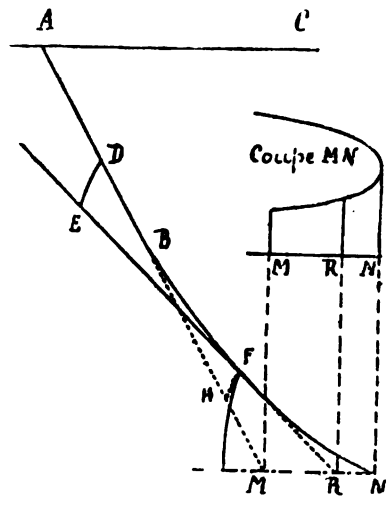

Fig. 68.

Le point du contour apparent se trouve donc en B, du côté de la concavité de la courbe DE. Nous avons représenté une caractéristique voisine de AM en EFR ; cette forme résulte de ce qu'elle doit couper les caractéristiques du second système sous un angle égal à 2α. On peut obtenir une caractéristique infiniment voisine de AM en cherchant la variation de $\partial\sigma$; nous avons trouvé au numéro 113 une formule qui donne $d\partial\sigma$ et qui devient dans le cas d'une caractéristique rectiligne :

$$d\partial\sigma = \frac{ds\ \partial u}{\cos\varphi}.$$

Or, on a :

$$\partial u = \frac{\partial\sigma}{\rho}.$$

On a donc :

$$\frac{d\partial\sigma}{\partial\sigma} = \frac{ds}{\rho\cos\varphi}.$$

Si on remplace ρ par la valeur trouvée plus haut, on peut intégrer et l'on trouve :

$$\partial\sigma = \partial\sigma_0\ \frac{\frac{\rho_0}{s_0} + \frac{1}{\cos\varphi}\log\frac{s}{s_0}}{\frac{\rho_0}{s_0}},$$

ou bien :

$$\partial\sigma = \partial\sigma_0 \left(\frac{\rho}{s} : \frac{\rho_0}{s_0} \right).$$

On peut considérer s et $\partial\sigma$ comme deux coordonnées d'un point de la courbe. La valeur de $\partial\sigma$ indique que la caractéristique infiniment voisine de AM est une logarithmique ; on voit aussi que $\partial\sigma$ change de signe au point B en même temps que ρ.

§ 4. CONSTRUCTIONS DE SOLUTIONS CONTINUES RÉGULIÈRES OU IRRÉGULIÈRES.

116. *Problème général.* — On donne les pressions le long d'une courbe ABCD (fig. 69) ; on peut donner les fonctions p et u ou deux des composantes qui figurent dans l'équation (11). On peut aussi donner, en grandeur et direction, la pression sur la courbe ; on sait qu'on peut alors déterminer, par l'épure circulaire, toutes les pressions au point considéré. Nous supposons que la courbe ABCD peut être assimilée à une suite d'arcs réguliers et que les fonctions p et u sont régulières pour chaque arc ; au point de jonction les fonctions sont continues, mais il peut y avoir des discontinuités dans les valeurs des dérivées. L'arc AB détermine une solution régulière que nous limiterons aux caractéristiques AE et EB ; de même les arcs BC et CD déterminent les solutions BCF et CDH. Les caractéristiques BE et BF déterminent une solution régulière EBFG ; les caractéristiques FC et CH détermineront la solution régulière FCHK ; les caractéristiques GF et FK détermineront la solution GFKL, et on continuerait de même en utilisant les autres arcs des courbes initiales. Il s'agit de calculer les coordonnées de ces différents points et les fonctions p et u en ces points.

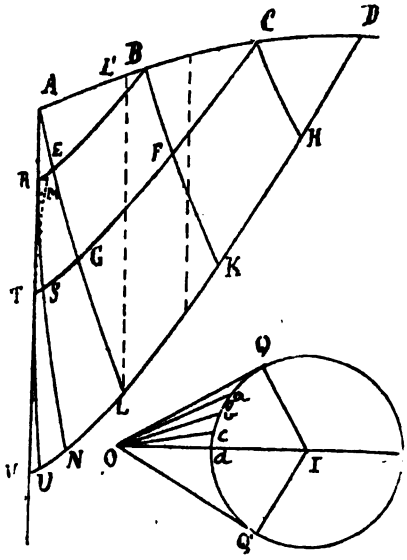

Fig. 69.

Nous supposerons d'abord que la courbe initiale est subdivisée en arcs suffisamment petits pour pouvoir négliger les quantités très petites du second ordre. La détermination d'un nouveau point revient à résoudre le problème suivant. On donne deux points A et B, c'est-à-dire que l'on donne :

$$\text{en A,} \quad x,\ y,\ p,\ u,$$
$$\text{en B,} \quad x',\ y',\ p',\ u' ;$$

on demande de trouver les coordonnées et les fonctions

$$x'',\ y'',\ p'',\ u'' \quad \text{en E.}$$

Il suffit, pour résoudre ce problème, d'appliquer les équations des caractéristiques aux arcs AE et EB ; on a :

$$dy = dx \operatorname{tang} (u - a),$$
$$dp = 2p \operatorname{tang} \varphi\ du - \Pi\ ds \cos (u + a),$$
$$\delta y' = \delta x' \operatorname{tang} (u + a),$$
$$\delta p' = 2p' \operatorname{tang} \varphi\ \delta u' + \Pi \delta \sigma' \cos (u' - a).$$

Nous supposons les arcs assez petits pour que les accroissements puissent approximativement être substitués aux différentielles ; nous écrirons donc :

$$dy = y'' - y, \qquad \delta y' = y'' - y',$$
$$dp = p'' - p, \qquad \delta p' = p'' - p',$$
$$du = u'' - u, \qquad \delta u' = u'' - u'.$$

Nous aurons alors quatre équations linéaires à quatre inconnues.

On peut obtenir une plus grande approximation en intégrant les équations par la formule du trapèze ; cela revient à remplacer les coefficients par la moyenne arithmétique de leurs valeurs aux deux extrémités de l'arc courbe considéré. On a alors :

$$\Delta y = \frac{\operatorname{tang} (u - a) + \operatorname{tang} (u'' - a)}{2} \Delta x,$$

$$\Delta p = (p + p'') \operatorname{tang} \varphi\ \Delta u + \Pi\ \Delta y,$$

et ainsi de suite. En remplaçant les accroissements par leurs valeurs, on trouve quatre équations à quatre inconnues ; mais elles ne sont

pas linéaires. Aussi vaut-il mieux employer la méthode des approximations successives. Le premier calcul sera utilisé pour calculer les coefficients des différences ; on trouve alors par des équations linéaires des valeurs plus exactes de x'', y'', p'', u''.

C'est en appliquant le problème que nous venons de résoudre que l'on trouvera successivement les points F, G, H, K, L et ainsi de suite. On voit que les pressions au point L dépendent de l'arc ABCD ; en changeant les pressions sur une partie de cet arc, on modifie les pressions en L. Il résulte de là que toute méthode d'intégration qui ne reposerait pas sur la considération des caractéristiques, doit être considérée comme inexacte. Ainsi, par exemple, en intégrant suivant la verticale, en utilisant les dérivées partielles par rapport à y, on fera dépendre uniquement le point L du point L' ou d'un arc voisin de L', alors que le point L dépend des arcs AB et CD. On pourrait espérer réussir lorsque les courbes ABCD sont régulières, car en introduisant un petit arc d'une courbe régulière, on introduit son prolongement analytique ; mais dans une intégration approchée, on modifiera quelque peu ce petit arc et le prolongement analytique sera complètement changé.

117. *Intégration graphique.* — Les calculs que nous venons d'indiquer peuvent être avantageusement remplacés par une méthode graphique. A tout point A (x, y) du plan (fig. 70), nous ferons correspondre un point A' de l'épure des pressions ; nous obtiendrons ce point en portant u et p en coordonnées polaires. Nous porterons l'angle $u - \alpha$ à partir d'un axe horizontal Ox ; cela revient à porter l'angle u à partir d'un axe initial faisant l'angle $-\alpha$ avec l'axe Ox. Le rayon vecteur qui représentera la pression p donnera en même temps la direction de la tangente à la caractéristique du premier système. La détermination de toutes les pressions revient à résoudre le problème suivant : connaissant les points A et B sur les deux épures (fig. 70), c'est-à-dire

$$x, y, p, u \text{ et } x', y', p', u',$$

trouver sur les deux épures le point E situé à l'intersection des caractéristiques AE et BE de système opposé.

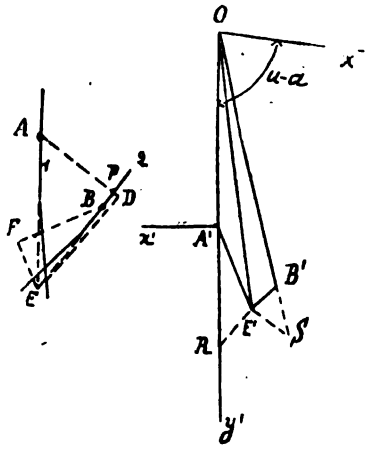

Fig. 70.

Nous négligerons d'abord, dans une première approximation, les quantités très petites du second

ordre. Nous obtiendrons le point E dans le plan en remplaçant les caractéristiques AE et BE par leurs tangentes ; remarquons que AE est parallèle à O'A' et que BE fait avec O'B' un angle constant égal à $2a$. En menant les droites AD et BF parallèles aux deux talus naturels, on aura

$$\Delta y_1 = \text{DE}, \qquad \Delta y_2 = \text{FE}.$$

Par le point A' de l'épure des pressions, menons deux axes rectangulaires $x'\text{A}'y'$, dont l'un $\text{A}'y'$ soit le prolongement de $o\text{A}'$. Si le point E' est assez voisin de A', on peut admettre approximativement que les coordonnées du point E' par rapport aux axes $x'\text{A}'y'$, sont :

$$y' = dp, \; x' = pd\omega.$$

L'équation de la caractéristique devient :

$$y' = 2\{\text{tang}\,\varphi.\; x' + \Pi.\; dy_1.$$

Il résulte de là que le point E' se trouve sur une droite que l'on construit en portant :

$$\text{A}'\text{R} = \Pi.\; dy_1 = \Pi.\; \text{DE}$$

et en remarquant que cette droite, qui a pour coefficient angulaire 2 tang φ, fait avec l'axe $\text{A}'x'$ un angle constant ψ que l'on peut construire facilement ; on a :

$$\text{tang}\,\psi = 2\;\text{tang}\,\varphi.$$

Nous pouvons appliquer le même raisonnement à la seconde caractéristique ; l'équation

$$\delta p' = -\,2\,p'\;\text{tang}\,\varphi\;\delta\omega' + \Pi\;\delta y_1$$

exprime que le point E' est approximativement sur une droite SE' que l'on obtient en portant :

$$\text{B}'\text{S} = \Pi\;\delta y_1$$

et en remarquant qu'elle fait avec OS ou avec la normale à OS un angle constant ; on a :

$$\text{ORE}' = \text{OSE}' = \frac{\pi}{2} - \psi.$$

Les droites RE' et SE' déterminent le point E' par leur intersection. On peut alors revenir sur la détermination du point E ; on connait la tangente à la première caractéristique au point E ; cette tangente est parallèle à OE' ; on en déduit la tangente à la seconde caractéristique au même point E ; on pourra tracer les courbes AE et BE en admettant que les tangentes aux extrémités d'un arc se coupent en un point situé à égale distance de ces extrémités.

118. *Tracé plus exact.* — Nous allons modifier le tracé précédent en tenant compte des petites quantités du second ordre. Supposons le problème résolu et remplaçons (fig. 71) les arcs AE et BE par les polygones ACE, BDE formés par les tangentes extrêmes. Nous calculerons plus loin les erreurs commises par cette substitution. Appliquons l'équation de la première caractéristique à la droite AC ; nous aurons :

$$du = o, \quad dp = \Pi\, dy_1.$$

La pression en C est donc :

$$p + \Pi\, h,$$

h désignant l'accroissement de y_1 en passant de A en C. On portera alors :

$$A'C' = \Pi\, h.$$

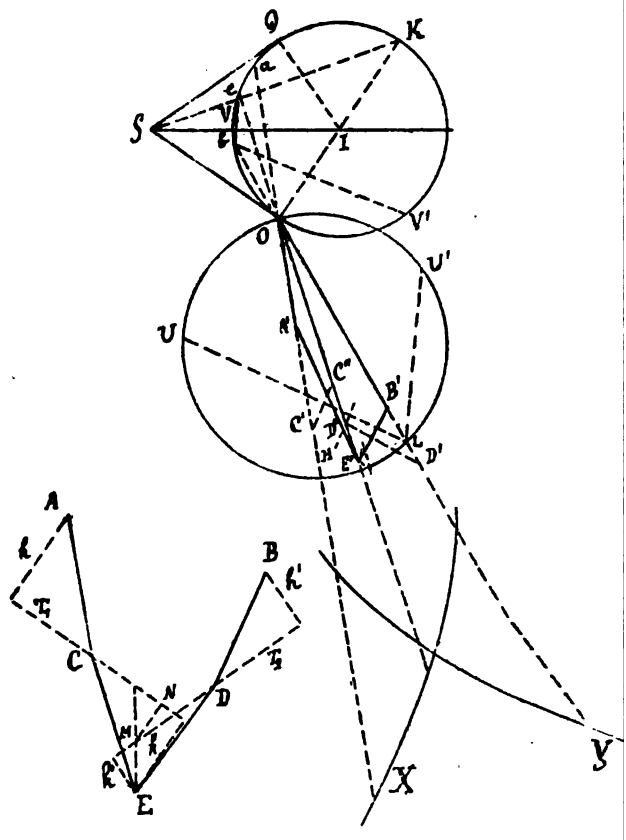

Fig. 71.

Au point C, il y a variation brusque de l'angle u ; nous considérerons le point C comme la limite d'un arc de caractéristique à

courbure infiniment grande ; en appliquant l'équation de la caractéristique à cet arc, nous trouvons :

$$dy_1 = o, \qquad dp = 2p \operatorname{tang} \varphi \, du,$$

$$p = Ce^{2 \operatorname{tang} \varphi \, u}.$$

C'est l'équation d'une spirale logarithmique qui coupe les rayons vecteurs sous un angle complémentaire de l'angle ψ. La variation de pression en C, sur l'arc infiniment petit dont il a été question et qui est réduit à zéro, sera représentée par un arc C'C'' de spirale.

Nous devons alors nous déplacer sur la droite CE ; on a :

$$du = o, \qquad dp = \Pi \, dy_1 ;$$

la pression augmente de :

$$\Pi \, \Delta y_1 = \Pi k.$$

On portera :

$$C''E' = \Pi k$$

et l'on aura la pression O'E' au point E.

On peut appliquer le même raisonnement à l'arc BE de la seconde caractéristique ; on la remplace par le polygone BDE. On trouve pour le segment BD.

$$\delta u = o, \qquad \delta p = \Pi \, \delta y_1,$$

$$B'D' = \Pi h'.$$

Le point D sera considéré comme la limite d'un arc infiniment petit ; on a :

$$\delta y_1 = o, \qquad \delta p = -2 p \operatorname{tang} \varphi \quad \delta u,$$

$$p = C e^{-2 u \operatorname{tang} \varphi}.$$

Les pressions en D sont représentées par un arc de spirale loga-

rithmique D'D''. Enfin pour le segment DE, l'accroissement de pression est :

$$D''E' = \Pi k'_1,$$

Les arcs de spirales C'C'' et D'D'' peuvent être tracés avec la plus grande facilité. On peut d'abord construire les spirales X et Y en prenant des constantes arbitraires ; on y arrive, soit en calculant les rayons vecteurs par logarithmes, soit par tangentes successives, en utilisant la propriété que ces spirales coupent les rayons vecteurs sous un angle constant complémentaire de l'angle ψ. On trace une circonférence quelconque passant par le point O ; les directions des tangentes aux spirales sont données par les droites qui joignent deux points fixes U et U' au point où le rayon vecteur rencontre la circonférence. On peut utiliser l'épure circulaire ; on a :

$$\text{tang } \psi = 2 \text{ tang } \varphi = \text{tang KSO}.$$

Les pôles des directions des tangentes sont le point V situé sur SK et le point V' tel que :

$$\text{arc OV} = \text{arc OV}'.$$

Toutes les spirales sont homothétiques des spirales X et Y ; les directions des cordes C'C'' et D'D'' sont données par les cordes homothétiques.

On peut aussi construire un patron en forme de cœur, au moyen des deux spirales ; en fixant le pôle au pôle de l'épure des pressions, on construit les arcs de spirales avec autant de facilité que les lignes droites.

Nous avons supposé le problème résolu ; montrons maintenant comment on déterminera le point E et la pression en ce point. Si l'on a appliqué la méthode du numéro précédent, on connait la position du point E avec assez d'approximation pour fixer définitivement les points C et D ; on prendra AC et BD égaux approximativement aux moitiés des cordes AE et BE. On se donne CE et on construit la pression OE' en partant de A et en partant de B ; on trouve deux points différents au lieu d'un seul. On fait tourner CE, les deux points décrivent deux courbes qui se coupent au point E' cherché. Les fausses positions du point E' sont si rapprochées de la vraie position, que les courbes seront remplacées par des droites. Il arrivera même souvent que le premier essai donnera deux fausses positions du

point E' si rapprochées, qu'on remplacera les courbes par les tangentes. On sait construire ces tangentes si l'on suppose que la rotation de CE est insensible et que l'on peut considérer k et k' comme constants.

On peut aussi opérer de la manière suivante. On a tracé définitivement AC, BD et les spirales C'C'' et D'D'' ; le point cherché E' doit satisfaire à la condition :

$$C''D'' = C''E' - D''E' = \Pi\ (k - k').$$

Le lieu des points E, satisfaisant à la condition que $k - k'$ est constant, est une verticale ; on a donc :

$$C''D'' = \Pi\ (k - k') = \Pi.\ M\ N.$$

On essaie une direction CE ou OE' et l'on porte cette valeur de C''D'' ; on trouvera une fausse position H du point D'' qui ne sera pas sur la spirale D'D'' ; ce point H décrira une courbe qui coupera cette spirale au point cherché.

Avant de commencer l'épure des pressions, il faut choisir l'échelle des pressions p ; ce qu'il y a de plus simple, c'est de représenter la pression p par la hauteur d'une colonne de terre dont le poids est cette pression, c'est-à-dire de représenter la pression p par

$$\frac{p}{\Pi}.$$

Si on divise les équations des caractéristiques par Π, et si on remplace alors

$$\frac{p}{\Pi} \text{ par } p,$$

on obtient les mêmes équations que si l'on avait pris un poids spécifique égal à l'unité ; il en est de même des équations aux dérivées partielles. On a alors :

$$A'C' = h, \qquad C''E' = k,$$
$$B'D' = h', \qquad D''E' = k'.$$

Quelquefois il peut être utile de prendre une échelle plus grande ; pour doubler ou tripler l'échelle des pressions, il suffit de prendre un poids spécifique égal à deux ou à trois. On aura alors :

$$A'C' = 2h \text{ ou } 3h, \text{ etc.}$$

On remarquera que les épures ainsi construites peuvent être appliquées à un poids spécifique quelconque ; ce n'est que pour construire l'échelle des pressions en kilogrammes qu'il faudra utiliser le poids spécifique des terres. Enfin l'échelle des longueurs peut être choisie arbitrairement sans changer l'épure ; cela résulte du principe de similitude exposé au numéro 102.

119. *Démonstration.* — Il nous reste à démontrer que l'intégration graphique qui précède est exacte au troisième ordre près. Reprenons l'équation de la première caractéristique :

$$dp = 2p \operatorname{tang} \varphi \, du + \Pi \, dy_1.$$

Soit :

$$\frac{dy_1}{du} = F = a + b\,(u - u_0) + \frac{c\,(u - u_0)^2}{2} + \ldots$$

On peut intégrer l'équation de la caractéristique de u_0 à u_1 ; on trouve :

$$p_1 = p_0\, e^{2 \operatorname{tang} \varphi\,(u_1 - u_0)} + \Pi \int_{u_0}^{u_1} e^{2 \operatorname{tang} \varphi\,(u_1 - u)} F \, du.$$

Or, on a :

$$e^{2 \operatorname{tang} \varphi\,(u_1 - u)} = 1 + \frac{2 \operatorname{tang} \varphi\,(u_1 - u)}{1} + \frac{4 \operatorname{tang}^2 \varphi\,(u_1 - u)^2}{1.2} + \ldots$$

Posons :

$$\int_{u_0}^{u_1} F \, du = F_1 \,, \quad \int_{u_0}^{u_1} \frac{(u_1 - u)^n}{1.2 \ldots n} F \, du = F_{n+1}.$$

La valeur de p_1 devient :

$$p_1 = p_0\, e^{2 \operatorname{tang} \varphi\,(u_1 - u_0)} + \Pi\,(F_1 + 2 \operatorname{tang} \varphi\, F_2 + \ldots\ldots).$$

Nous pouvons construire cette expression en portant (fig. 72) :

$$BC = \Pi \Delta y_1 = \Pi F_1$$

AB et CD étant les arcs de la spirale

$$p = Ce^{2 \operatorname{tang} \varphi u}$$

On obtient :

$$p_1 = p_0 e^{2 \operatorname{tang} \varphi (u_1 - u_0)} + \Pi \Delta y_1 e^{2 \operatorname{tang} \varphi (u_1 - u')}$$

ou bien :

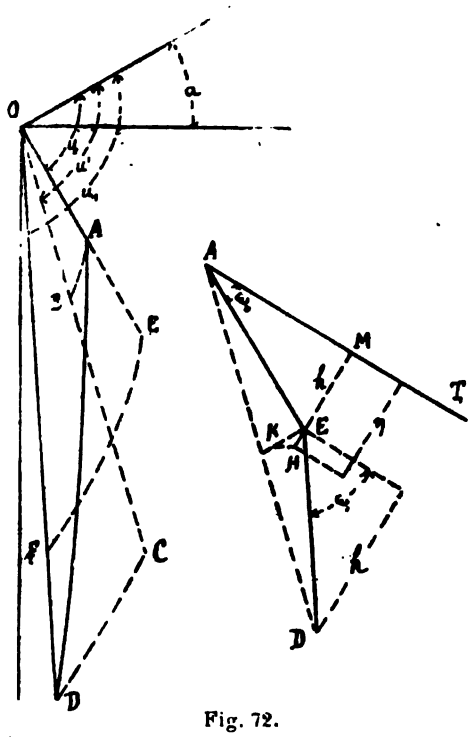

Fig. 72.

$$p_1 = p_0 e^{2 \operatorname{tang} \varphi (u_1 - u_0)} + \Pi [F_1 + 2 \operatorname{tang} \varphi (u_1 - u') F_1 + \ldots]$$

En identifiant cette valeur avec la valeur de p_1 qu'il s'agit de construire, on trouve :

$$(u_1 - u') F_1 = F_2 + \ldots$$

Cette équation détermine le rayon OB suivant lequel il faut porter Δy_1 ; on trouve facilement :

$$F_2 = \frac{u_1 - u_0}{2} F_1 + \ldots$$

$$u_1 - u' = \frac{u_1 - u_0}{2}.$$

Cela donne une première méthode d'intégration.

Cherchons maintenant à construire p_1 en divisant Δy_1 en deux parties h et k et en portant :

$$AE = \Pi h \quad , \quad FD = \Pi k,$$

EF étant toujours un arc de la spirale dont il a été question précédemment. On a alors :

$$p_1 = (p_0 + \Pi h)\, e^{2 \operatorname{tang} \varphi (u_1 - u_0)} + \Pi k$$

ou bien :

$$p_1 = p_0 e^{2 \operatorname{tang} \varphi (u_1 - u_0)} + \Pi \left[h + k + 2 \operatorname{tang} \varphi (u_1 - u_0) h + \ldots\right]$$

En identifiant avec la valeur qu'il s'agit de construire, on trouve :

$$h + k = F_1,$$
$$h (u_1 - u_0) = F_2 + \ldots$$

Il s'agit de montrer que ces valeurs de h et k sont précisément les Δy_1 relatifs aux tangentes menées aux extrémités de l'arc de la caractéristique. Si nous donnons à h et k ces nouvelles significations, on a :

$$h + k = F_1$$
$$h \operatorname{cotg} \omega_0 + k \operatorname{cotg} \omega_1 = \int_{u_0}^{u_1} \operatorname{cotg} \omega .\, dy.$$

Or :

$$\operatorname{cotg} \omega = \operatorname{cotg} [\omega_1 - (u_1 - u)] = \operatorname{cotg} \omega_1 + \frac{u_1 - u}{\sin^2 \omega_1} + \frac{(u_1 - u)^2}{2} \frac{2 \cos \omega_1}{\sin^3 \omega_1} + \ldots$$

$$dy = F du.$$

On a donc :

$$h \operatorname{cotg} \omega_0 + k \operatorname{cotg} \omega_1 = F_1 \operatorname{cotg} \omega_1 + \frac{F_2}{\sin^2 \omega_1} + \frac{2 F_2 \operatorname{cotg} \omega_1}{\sin^2 \omega_1} + \ldots$$

Remplaçons F_1 par $h + k$; il vient :

$$h\,(\operatorname{cotg}\omega_0 - \operatorname{cotg}\omega_1) = \frac{F_2}{\sin^2\omega_1} + \frac{2F_3\operatorname{cotg}\omega_1}{\sin^2\omega_1} + \dots$$

Or :
$$\omega_0 = \omega_1 - (u_1 - u_0)$$

$$\operatorname{cotg}\omega_0 = \operatorname{cotg}\omega_1 + \frac{u_1 - u_0}{\sin^2\omega_1} + \frac{(u_1 - u_0)^2}{\sin^2\omega_1}\operatorname{cotg}\omega_1 + \dots$$

On trouve finalement :

$$h\,(u_1 - u_0) = F_2 + \dots$$

Cela démontre que les valeurs de h et k obtenues par les tangentes sont celles qui donnent p_1 au troisième ordre près. On a d'ailleurs, à l'approximation que nous avons admise :

$$h\,(u_1 - u_0) = F_2 = \frac{u_1 - u_0}{2}\,F_1.$$

$$h = k$$

Cela prouve que l'on peut admettre l'égalité approximative des tangentes qui remplacent l'arc de la caractéristique.

En utilisant les formules que nous venons d'établir, on peut imaginer une construction où l'on tient compte des quantités très petites du troisième ordre. Nous conservons à h la même signification, mais nous écrivons sa valeur en tenant compte des termes du troisième ordre :

$$h\,(\operatorname{cotg}\omega_0 - \operatorname{cotg}\omega_1) = \frac{F_2}{\sin^2\omega_1} + \frac{2\,F_3}{\sin^2\omega_1}\operatorname{cotg}\omega_1 + \dots$$

$$h\,(u_1 - u_0)\,[1 + (u_1 - u_0)\operatorname{cotg}\omega_1] = F_2 + 2\,F_3\operatorname{cotg}\omega_1.$$

On trouve facilement :

$$F_3 = \frac{u_1 - u_0}{3}\,F_2 + \dots$$

On a donc :

$$h\,(u_1 - u_0) = F_2\left[1 - \frac{u_1 - u_0}{3}\operatorname{cotg}\omega_1\right]$$

Au lieu d'introduire h et k dans l'intégration graphique, nous remplacerons h par η, valeur à déterminer, et k par $\Delta y_1 - \eta$; en identifiant les valeurs de p_1, on trouve alors :

$$\eta (u_1 - u_0) [\ 1 + (u_1 - u_0) \operatorname{tang} \varphi\ ] = F_1 + 2 \operatorname{tang} \varphi\ F_2 + \ldots$$

Remplaçons F_2 par sa valeur écrite plus haut, il vient :

$$\eta (u_1 - u_0) = F_1 \left(1 - \frac{u_1 - u_0}{3} \operatorname{tang} \varphi \right).$$

Des valeurs de h et de η, on tire :

$$\frac{\eta}{h} = 1 - \frac{u_1 - u_0}{3} (\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{cotg} \omega_1)$$

On peut remplacer ω_1 par ω_0 et écrire :

$$\frac{\eta - h}{h} = \frac{\cos (\omega_0 + \varphi)}{\sin \omega_0 \cos \varphi} \quad \frac{u_1 - u_0}{3}.$$

Soient : AE et ED les deux tangentes aux extrémités de l'arc de la caractéristique, AT_1 la direction du premier talus naturel, h = EM. Par le point E menons une perpendiculaire à AE ou à la corde AD_1 ; soit EK les deux tiers du segment de cette droite intercepté par la corde ; menons KH, ligne horizontale qui détermine le point H de ME prolongé ; je dis que l'on a :

$$\eta = \text{HM}.$$

En effet, on a, à l'approximation admise :

$$\text{EK} = \frac{2}{3} \text{AE} \frac{u_1 - u_0}{2} = \frac{h}{\sin \omega_0} \cdot \frac{u_1 - u_0}{3}.$$

Dans le triangle EKH, on a :

$$\frac{\text{EH}}{\text{EK}} = \frac{\cos (\omega_0 + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

On en déduit :

$$\frac{EH}{h} = \frac{\cos(\omega_0 + \varphi)}{\sin\omega_0 \cos\varphi} \frac{u_1 - u_0}{3},$$

$$EH = \eta - h,$$

$$\eta = h + EH = HM.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Cette méthode ne peut être appliquée que dans un travail de perfectionnement. Si l'on a déterminé plusieurs arcs successifs d'une même caractéristique, on pourra construire sur l'épure des pressions la courbe *(s, u)* en portant en rayon vecteur l'arc de la caractéristique augmenté d'une constante arbitraire; le rayon de courbure de la caractéristique est égal à

$$\frac{ds}{du};$$

en menant les tangentes à la courbe *(s, u)*, on peut trouver les rayons de courbures avec une certaine approximation. On démontre facilement que si l'on connait le rapport des rayons de courbure aux extrémités A et B de l'arc de la caractéristique, le point E, intersection des tangentes extrêmes, divise, dans le rapport de ces rayons, le tiers central de la projection de l'arc sur la tangente en A. On démontre cette propriété approximativement en prenant la tangente à l'origine de l'arc comme axe des x ; l'équation de la courbe se met sous la forme :

$$y = \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{6} + \cdots$$

L'abscisse du point d'intersection des tangentes est :

$$x' = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{bx}{6a}\right)$$

On a :

$$a = \frac{1}{\rho}, \qquad bx = \frac{-\Delta\rho}{\rho^2},$$

d'où :

$$x' = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{\Delta\rho}{6\rho}\right).$$

La construction donne :

$$x' = \frac{x\rho' + 2x\rho}{3(\rho + \rho')} = \frac{x}{3}\,\frac{3\rho + \Delta\rho}{2\rho + \Delta\rho},$$

valeur qui se ramène facilement à la précédente.

On peut encore déterminer autrement la position du point d'intersection des tangentes extrêmes. Menons à la caractéristique une tangente intermédiaire également inclinée sur les tangentes aux extrémités de l'arc considéré.

L'abscisse x'' du point de contact est donnée par :

$$ax'' + \frac{bx''^2}{2} + \ldots = \frac{1}{2}\left[ax + \frac{bx^2}{2} + \ldots\right]$$

d'où :

$$x'' = \frac{x}{2} + \frac{bx^2}{8a}.$$

En comparant cette valeur à celle de x', on trouve :

$$x' - \frac{x}{2} = \frac{2}{3}\left(x'' - \frac{x'}{2}\right).$$

Or, on peut trouver x'' en menant un rayon vecteur suivant la bissectrice de l'angle des rayons extrêmes de l'arc de la courbe (s, u). Au moyen de cette bissectrice, on divise le Δs en deux parties dont l'une est approximativement égale à x''.

De toutes ces méthodes, celle que nous avons exposée au numéro précédent nous paraît la plus avantageuse ; elle est suffisamment exacte, si les Δu sont suffisamment petits. Il y a cependant des cas où l'on ne peut pas réduire ces Δu ; cela se présente quand la caractéristique a une courbure très grande ; même en prenant un arc très petit, on ne réduit pas Δu. Cependant la construction est encore applicable, car l'erreur ne porte que sur le terme en dy, et ce terme est très petit.

Rappelons la remarque du numéro 24. Au point de vue théorique, il y a une lacune à combler. Il faudrait démontrer qu'en prenant des arcs ou des Δu suffisamment petits, les erreurs commises sont moindres que toute quantité donnée, si petite qu'elle soit. Cette démonstration paraît difficile, mais on peut y suppléer. Ayant dressé une épure, on peut recommencer les opérations en prenant des arcs

plus petits ; on reconnait ainsi, en comparant les résultats, que la méthode est d'une exactitude qui, au point de vue pratique, équivaut à l'exactitude absolue.

120. *Caractéristiques à la surface libre.* — Le problème que l'on doit résoudre en pratique est ordinairement celui-ci : on donne la surface libre des terres et les parois du mur, déterminer les pressions. Les pressions sur la surface libre sont égales à zéro ; on reconnait immédiatement que l'équation (16) qui donne les directions des caractéristiques est indéterminée. Pour lever cette indétermination, nous nous placerons en un point infiniment voisin de la surface libre, en donnant, à l'ordonnée y du point de la surface libre, un accroissement infiniment petit Δy. Nous poserons :

$$p'_{xx} = \frac{\partial p_{xx}}{\partial y}, \quad p'_{xy} = \frac{\partial p_{xy}}{\partial y}, \quad p'_{yy} = \frac{\partial p_{yy}}{\partial y},$$

et nous aurons :

$$p'_{xx} = p'_{xx}\,\Delta y + \ldots, \quad p'_{xy} = p'_{xy}\,\Delta y + \ldots, \quad p_{yy} = p'_{yy}\,\Delta y + \ldots$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (16) et si on fait converger Δy vers zéro, on trouve :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p'_{xy} \pm (p'_{xx} + p'_{yy}) \sin\varphi \cos\varphi}{-(p'_{xx} - p'_{yy}) - (p'_{xx} + p'_{yy}) \sin^2\varphi}.$$

On voit que les directions des caractéristiques sont les mêmes que si les pressions étaient p'_{xx}, p'_{xy}, p_{yy}.

Soit

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang} i$$

l'équation de la tangente au point considéré de la surface libre ; exprimons que les pressions restent égales à zéro quand on se déplace sur la surface libre ; on a :

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p_{xx}}{\partial y}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y}\,dy = 0$$

$$\frac{\partial p_{yy}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y}\,dy = 0$$

Nous tirons de ces équations, les valeurs des dérivées partielles par rapport à x ; nous trouvons, en remplaçant le rapport $dy : dx$ par — tang i :

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = p'_{xx} \text{ tang } i,$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} = p'_{xy} \text{ tang } i,$$

$$\frac{\partial p_{yy}}{\partial x} = p'_{yy} \text{ tang } i.$$

Substituons dans les équations aux dérivées partielles de l'équilibre, nous obtenons :

$$p'_{xx} \text{ tang } i + p'_{xy} = o \qquad (17),$$

$$p'_{xy} \text{ tang } i + p'_{yy} = \Pi \qquad (18).$$

Portons ensuite dans l'équation (11) les valeurs de p_{xx}, p_{xy}, p_{yy} au point $(y + \Delta y, x)$ écrites plus haut et passons à la limite après avoir divisé par le carré de Δy, nous trouvons :

$$\frac{1}{4}(p'_{xx} - p'_{yy})^2 + p'^2_{xy} = \frac{1}{4}(p'_{xx} + p'_{yy})^2 \sin^2 \varphi \qquad (19).$$

Ces équations (17), (18), (19), sont précisément celles que nous avons obtenues au numéro 104 en étudiant la solution linéaire ; elles donnent les pressions qui se produiraient à une profondeur verticale égale à 1, si la surface libre était la tangente prolongée indéfiniment. Il résulte de cette analyse que les directions des caractéristiques ne dépendent que de l'angle i et sont les mêmes que dans la solution linéaire que l'on obtiendrait en prolongeant la tangente indéfiniment dans les deux sens. On les obtient facilement par l'épure circulaire. Soient (fig. 69) : OI l'épure circulaire, ABCD la surface libre ; menons les droites Oa, Ob, Oc, Od parallèles aux tangentes en A, B, C, D ; les points a, b, c, d sont les pôles des facettes ; les directions des caractéristiques en A, B, C, D sont aQ', bQ', cQ', dQ' pour le premier système et aQ, bQ, cQ, dQ pour le second système. On peut alors tracer l'épure des pressions en appliquant la méthode générale.

On peut aussi déterminer la valeur de u à la surface libre au moyen des équations (23) et (24) qui déterminent les fonctions p et u :

si on remplace p par zéro, on trouve deux équations ne contenant que les deux dérivées partielles de p ; en exprimant que p reste égal à zéro en se déplaçant sur la surface libre, on trouve entre ces mêmes dérivées une nouvelle équation ; si on élimine ces dérivées entre les trois équations, on obtient une relation entre u et le coefficient augulaire de la tangente.

Enfin, on peut aussi appliquer le principe de similitude en prenant le point considéré de la surface libre comme centre de similitude. Si le rapport de similitude tend vers l'infini, la surface libre devient plane ; or, les directions des caractéristiques ne changent pas ; donc, au point pris comme centre de similitude, les caractéristiques ont la même direction que si la courbe libre était remplacée par sa tangente.

Supposons que l'on donne un point, la tangente et le rayon de courbure de la courbe libre et proposons-nous de déterminer les rayons de courbure des deux caractéristiques qui passent par ce point. Le problème sera résolu si l'on calcule les deux dérivées partielles de la fonction u. Nous avons démontré précédemment que la direction des caractéristiques à la surface libre ou la fonction u dépend des dérivées premières des pressions p_{xx}, p_{xy}, p_{yy}. Par un calcul analogue, on exprimerait la différentielle totale de la fonction u au moyen des dérivées secondes des pressions et l'on calculerait ces dérivées secondes au moyen des équations qui lient les pressions et en exprimant que les différentielles secondes des pressions sont égales à zéro le long de la courbe libre. On peut aussi utiliser les équations (23) et (24) ; on prend les dérivées de ces équations et on égale à zéro la différentielle seconde de p suivant la courbe libre ; on remplace p par zéro ; on trouve que les dérivées secondes de u disparaissent, mais les dérivées secondes de p doivent satisfaire à des équations surabondantes ; en éliminant ces dérivées secondes,

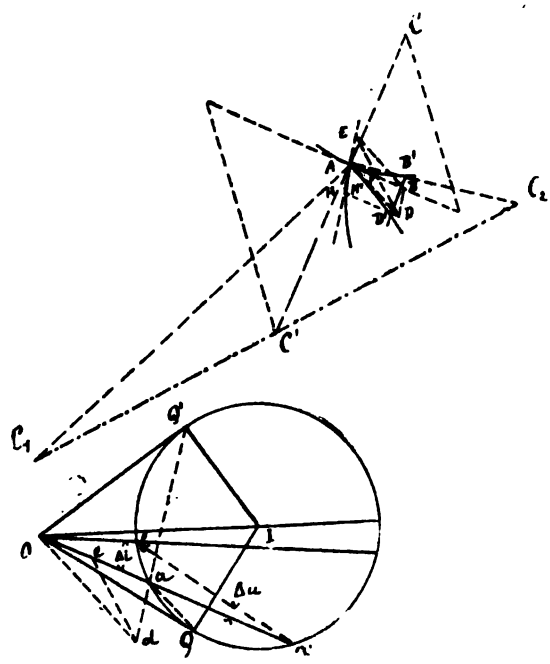

Fig. 73.

on trouve deux équations qui déterminent les dérivées premières de la fonction u. On peut déduire de ces calculs une construction très élégante des centres de courbure des caractéristiques, mais nous allons démontrer cette construction par une voie plus rapide.

Soient (fig. 73) : A, le point considéré, AB la tangente et C le centre de courbure de la courbe libre ; construisons par l'épure circulaire les caractéristiques AD et BD pour la solution linéaire qui correspond à la tangente AB ; portons en sens contraire du rayon de courbure :

$$AC' = AC \frac{aa'}{Oa}$$

Je dis que les centres de courbure cherchés C_1 et C_2 s'obtiennent en menant par C' une droite C_1C_2 perpendiculaire à la médiane DF du triangle ABD. On peut aussi construire le triangle Obd, au lieu du triangle ABD.

Pour démontrer cette construction, nous appliquerons d'abord l'équation (35) au point A ; on obtient :

$$\Pi\, \partial\sigma\, du \cos(u - a) - \Pi\, ds\, \delta u \cos(u + a) = o \qquad (35).$$

Nous prendrons :

$$ds = AD, \qquad \delta\sigma = AH = BD.$$

Dans la solution linéaire ABD, on a :

$$\text{pour AD,} \qquad dp = -\Pi\, ds \cos(u + a),$$

$$\text{pour BD,} \qquad \delta p = \Pi\, \delta\sigma \cos(u - a).$$

Comme la pression en D est unique, on a :

$$dp = \delta p$$

ou bien :

$$-ds \cos(u + a) = \delta\sigma \cos(u - a).$$

L'équation (35) donne alors :

$$du + \partial u = o.$$

Nous pouvons prolonger la caractéristique H'A par son cercle de courbure en A et prendre :

$$\delta\sigma = -\text{BD} = -\text{AE}.$$

Alors δu change de signe et l'équation précédente devient :

$$du = \delta u.$$

Nous devons maintenant introduire la courbure de l'arc AB' ; en passant de A en B', les angles i et u subissent des accroissements Δi et $\Delta' u$; l'épure circulaire donne :

$$\Delta i = b\text{O}a$$
$$\Delta' u = ba'a$$

On trouve facilement :

$$\text{O}a \,.\, di = aa' .\ d'u.$$

Soit AD'B' le triangle curviligne qui a pour limite relative le triangle ADB ; nous supposerons :

$$\text{arc AB}' = \text{AB}.$$

Nous obtiendrons le même accroissement $\Delta' u$ en suivant le contour AD'B ; on trouve :

$$\Delta' u = du + \delta u + \ldots$$

Nous admettons que la courbure de B'D' a pour limite la courbure de AH'. On déduit de l'équation précédente :

$$d'u = du + \delta u = 2du = 2\delta u.$$

La relation entre di et $d'u$ devient :

$$\frac{1}{2}\ \frac{\text{O}a}{aa'}\ di = du = \delta u.$$

Or, on a :

$$\frac{\text{O}a}{aa'} = \frac{\text{AC}}{\text{AC}'},\ di = \frac{\text{AB}}{\text{AC}},\ du = \frac{\text{AD}}{\text{AC}_1},\ \delta u = \frac{\text{AE}}{\text{AC}_1},$$

on obtient donc :

$$\frac{\text{AF}}{\text{AC}'} = \frac{\text{AD}}{\text{AC}_1} = \frac{\text{AE}}{\text{AC}_1}.$$

Il résulte de là que la figure $AC_1C'C_2$ est semblable et perpendiculaire à la figure ADFE ; donc les trois points C_1, C', C_2 sont sur une droite perpendiculaire à DF ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons aussi que de l'égalité entre du et δu, on peut conclure que les courbures totales des arcs AD' et D'B' sont approximativement égales ; il en résulte que le pôle des facettes, pour le point D', est approximativement au milieu de l'arc ab qui unit les pôles relatifs aux points A et B'.

121. *Pressions sur un mur de soutènement.* — Nous cherchons l'état d'équilibre qui se produit au moment où le mur va céder ; dans cet état, les terres sont sur le point de glisser sur le mur. Si l'angle φ_1 du frottement des terres sur le mur est égal ou plus grand que l'angle φ du frottement des terres sur elles-mêmes, la poussée sur le mur fera cet angle φ avec la normale. On ne peut admettre l'angle φ_1, car les terres ne seraient pas en équilibre ; il est bien évident que, dans ce cas, une mince couche de terre adhérera au mur et qu'il y aura glissement sur cette couche. Si la paroi intérieure du mur est plus ou moins polie, ce qui est bien certainement un cas exceptionnel, l'angle φ_1 est plus petit que φ ; la poussée fait cet angle φ_1 avec la normale au mur, et l'on obtiendra l'angle u ou les directions des caractéristiques en exprimant cette condition au moyen de l'épure circulaire.

Nous supposons (fig. 69) que l'on a déterminé la caractéristique AEGL, comme il a été dit plus haut ; on donne la surface intérieure ART du mur ; le long de cette ligne on ne connait pas la pression, mais on connait l'angle u. Soit ER une caractéristique du second système prolongée jusqu'à la surface du mur ; on peut tracer approximativement cet arc ER, car on connait le point E, la tangente en E, et la direction de la tangente en R. On commettra ainsi une certaine erreur, car la courbure de l'arc ER peut être plus ou moins grande ; mais en prenant AE suffisamment petit, on pourra diminuer autant qu'on le voudra l'influence de cette erreur. Il faut remarquer, en effet, que les pressions sur ER seront très petites ; si ER n'est pas exactement une caractéristique, on change les données du problème en se donnant ER comme caractéristique ; mais les erreurs commises sur des pressions déjà très petites, n'auront pas d'influence sensible sur l'état d'équilibre du massif. Ayant tracé l'arc ER, on déterminera la pression en R par l'une des équations des caractéristiques. On effectuera l'intégration graphique de cette équation en remplaçant l'arc par ses tangentes extrêmes, comme nous l'avons expliqué au numéro 118. On pourrait aussi subdiviser l'arc en plusieurs parties et appliquer l'intégration graphique à chacun des segments.

On construit ensuite la caractéristique GST ; on obtient le point S par la construction générale que l'on applique au quadrangle EGSR. On trace l'arc ST comme on a tracé l'arc ER et l'on obtient la pression en T, sans tâtonnement, par l'intégration graphique. On construit de même la caractéristique LUV, et ainsi de suite.

Nous avons dit que, presque toujours, la poussée fait avec la normale au mur, un angle égal à l'angle φ ; on en conclut que la caractéristique du premier système est tangente au mur ; on en conclut que la paroi intérieure du mur touche les caractéristiques du système 1 et forme le contour apparent des surfaces qui représentent les fonctions p et u. Il peut cependant arriver que la paroi du mur se confonde avec la caractéristique ; ainsi, par exemple, connaissant les caractéristiques ER et EL, on peut déterminer la caractéristique RSN; on pourrait établir la paroi du mur suivant RSN ; la solution qui couvre l'angle curviligne NRV n'existe plus ; la paroi du mur est la caractéristique.

Lorsqu'on connait les pressions sur le mur, le problème est complètement résolu, en ce qui concerne la poussée des terres ; mais on peut se proposer de prolonger la solution des équations aux dérivées partielles au-delà du contour apparent ; on doit alors construire deux nouvelles nappes des surfaces qui représentent les fonctions inconnues. En partant des points R et T, on peut construire le point M situé à l'intersection des caractéristiques RM et TM ; on voit que la caractéristique ER a un point de rebroussement. On construirait de même la caractéristique partant du point V, et ainsi de suite.

Il est facile de voir que la pression diminue en passant de la première à la seconde nappe. En effet, au point R, on a :

$$\rho = o, \ \delta\sigma = \rho \ \delta u = o, \ \delta p = -2p \operatorname{tang} \varphi \ \delta u.$$

Cette équation différentielle montre que la tangente à la courbe (p, u) est la tangente à la spirale

$$p = Ce^{-2u \operatorname{tang} \varphi}.$$

122. *Butée des terres.* — Nous supposons que sous l'effet de la poussée d'une voûte ou de toute autre cause, le mur AK (fig. 74) tend à se renverser du côté des terres ; nous devons alors chercher un autre état d'équilibre limite que celui que nous avons considéré précédemment ; c'est l'état où les terres sont sur le point de se mouvoir vers le haut en cédant à l'action du mur. Plaçons-nous au point

B de la surface libre ; nous avons démontré que les directions des caractéristiques en B sont les mêmes que si le profil du terrain était la tangente en B prolongée indéfiniment. Menons, dans l'épure

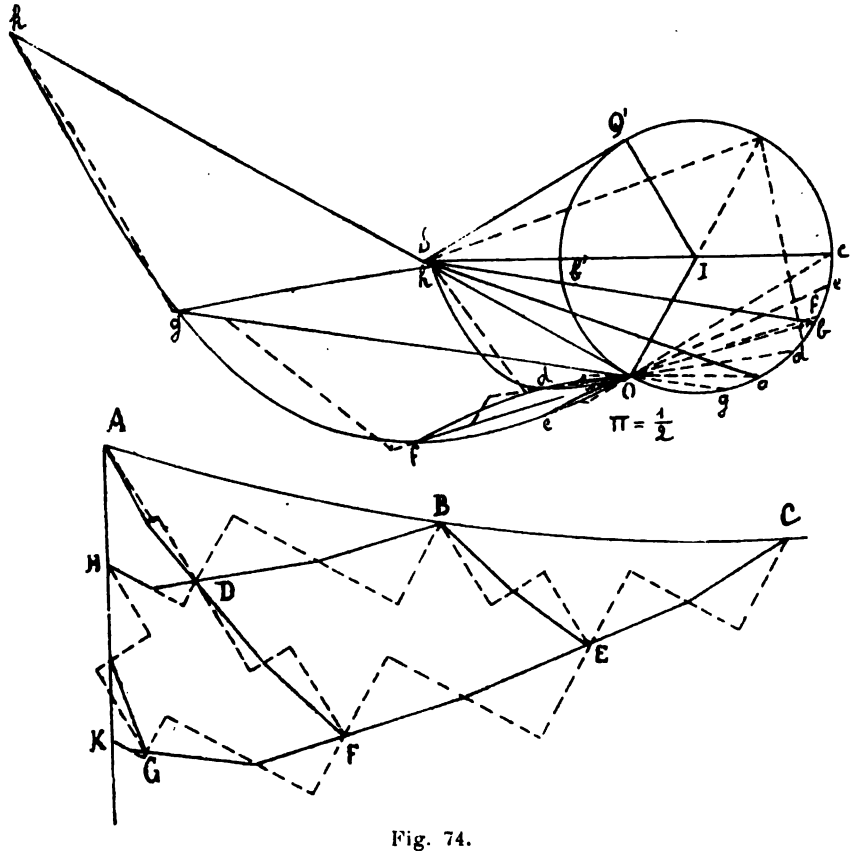

Fig. 74.

circulaire, une parallèle $Ob'b$ à la tangente en B ; en prenant le point b' comme pôle des facettes, nous retrouverions la poussée des terres comme dans la figure 69 ; si dans cette figure, on représente la pression sur une ligne de glissement telle que BE, on voit qu'elle suppose le glissement vers le bas. Dans la figure 74, nous prendrons le pôle des facettes en b et si l'on représente la pression sur une ligne de glissement telle que BD, on reconnait facilement qu'elle suppose que les terres glissent vers le haut. Remarquons aussi que la pression sur une face verticale est représentée par Sb, elle est plus grande que sa conjuguée qui est la pression verticale représentée par Sb'.

Nous trouverons de la même manière les directions des caractéristiques aux points A et C. Nous déterminerons successivement les points D, E, F et les points correspondants *d*, *e*, *f* de l'épure des pressions. Nous devons alors construire la solution FAK comprise entre le mur et la caractéristique ; nous supposerons que l'angle du frottement des terres sur le mur est égal ou plus grand que l'angle φ du frottement des terres sur elles-mêmes ; dans l'état d'équilibre que nous cherchons, les terres glissent vers le haut, sur la surface du mur, et la pression sur cette surface fait l'angle φ avec la normale. On en conclut que les directions des caractéristiques sont déterminées en tous les points de la paroi intérieure du mur ; l'une est tangente à cette paroi, l'autre est la direction de la pression ; d'après nos conventions, c'est cette dernière qui est la caractéristique du premier système.

Prolongeons la caractéristique BD jusqu'au mur en H ; nous pourrons tracer approximativement l'arc DH, car nous connaissons la tangente en D et nous connaissons l'angle que cet arc fait en H avec le mur. Nous trouverons alors la pression en H en intégrant l'une des équations de la caractéristique ; on remplacera l'arc par un polygone circonscrit. L'arc DH ne sera pas exactement tracé ; mais en prenant AD suffisamment petit, les pressions sur DH seront très petites et les erreurs commises dans l'évaluation de ces pressions auront peu d'influence sur l'état d'équilibre du massif inférieur. Les caractéristiques DH et DF déterminent une solution HDFG ; on calcule le point G, on en déduit le point K, et ainsi de suite.

Le mur forme le contour apparent des surfaces qui représentent les fonctions p et u ; en approchant du mur, la pression augmente très rapidement ; c'était l'inverse dans la poussée des terres. Nous pouvons, comme précédemment, prolonger la solution au-delà du contour apparent ; les caractéristiques du premier système présentent des points de rebroussement situés sur le contour apparent.

Si l'angle φ_1 était plus petit que φ, le mur ne serait plus un contour apparent. L'épure circulaire permet, dans ce cas, de déterminer les directions des caractéristiques ou l'angle u en tous les points de la surface du mur. La construction des caractéristiques ne présente aucune difficulté.

123. *Profil rectiligne et mur plan.* — Le profil du terrain est la droite AB (fig. 75) ; on demande de déterminer les pressions sur un mur plan AM ; sur la figure, AB est une ligne horizontale, AM est une ligne verticale, mais la méthode s'applique à d'autres directions. Nous trouvons d'abord, en ACB, une solution linéaire ; les directions

des caractéristiques sont données par l'épure circulaire ; les pressions sur la caractéristique rectiligne AC s'obtiennent par l'équation :

$$dp = \Pi\, dy_1\,, \quad p = \Pi\, y_1\,;$$

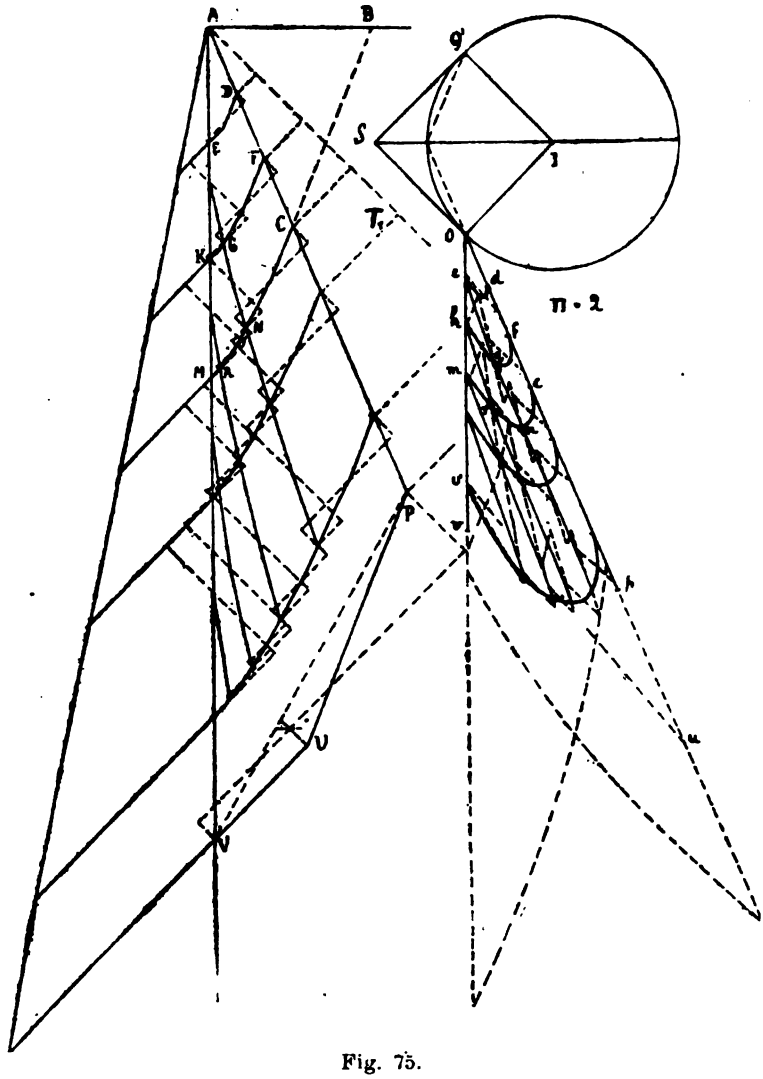

Fig. 75.

y_1 est la distance au premier talus naturel AT_1. On construit alors la solution CAM par la méthode générale du numéro 121 ; on construit successivement les points E, G, K, N, R, M, et ainsi de suite ; les points correspondants de l'épure des pressions sont représentés par e, g, k, n, r, m.

En appliquant le principe de similitude, comme au numéro 103, on reconnait que la solution ACM est une solution conique ; nous en concluons que les caractéristiques de même système sont semblables. Cette similitude ne sera pas parfaite dans l'épure, car l'arc DE n'est déterminé que par la direction de ses tangentes extrêmes, et l'on peut tracer une courbe satisfaisant à ces deux conditions et différant sensiblement de la caractéristique véritable. En nous donnant cette courbe DE comme caractéristique, nous modifions donc légèrement les données du problème, nous obtenons une solution qui n'est pas exactement conique. Nous admettons comme évident — il serait bien difficile de démontrer cette proposition mathématiquement — que les erreurs très petites commises sur les pressions le long de la courbe DE, exercent des influences très petites dans le massif inférieur ; les erreurs relatives qui affectent les pressions vont donc décroître indéfiniment au fur et à mesure que l'on s'éloignera de l'arc DE, et les caractéristiques seront déterminées avec une exactitude croissante. Supposons que l'on applique le principe de similitude en prenant un rapport très petit ; la longueur AD sera réduite dans ce rapport et la solution sera, par conséquent, rendue beaucoup plus exacte ; il parait évident que l'on obtiendrait l'exactitude absolue en passant à la limite. La solution obtenue est donc asymptotique à la solution conique exacte. Si on représente les pressions sur le mur en E, K, M, etc., les extrémités de ces pressions se trouveront sur une droite dans la solution conique exacte ; en réalité, on obtiendra une courbe asymptotique à cette droite, à cause des erreurs de l'arc DE. Dans l'épure de la figure 75, toutes ces erreurs disparaissent dans l'épaisseur du trait ; le lieu des extrémités des pressions ne parait pas différer d'une ligne droite ; mais la forme des caractéristiques se modifie légèrement. Nous devons cependant ajouter que nous avons déterminé la pression au point E de la manière suivante. Le rayon de courbure au point E de la caractéristique DE est égal à zéro ; nous avons remplacé l'arc par deux tangentes, en prenant la tangente en E deux fois plus petite que la tangente en D. Nous avons alors appliqué la construction exposée à la fin du numéro 119 et qui donne une plus grande approximation que la construction ordinaire. Nous avons représenté cette construction à une plus grande échelle en PUV ; on voit que Δy_1 est partagé en deux parties que nous avons portées en pu et $u'v$ dans l'épure des pressions. Il se fait que cette construction rapide donne exactement la pression au point V, ou du moins l'erreur est trop petite pour être sensible sur l'épure. De la pression en V, nous avons déduit la pression au point E.

Nous avons, au numéro 115, étudié la variation des courbures le long d'une caractéristique rectiligne ; nous pouvons appliquer cette étude à la caractéristique AC de la solution conique. En intégrant l'équation différentielle qui détermine la variation des courbures, nous avons trouvé une formule qui ne peut pas s'appliquer à une solution conique, car le rayon de courbure des caractéristiques semblables ne varie pas comme la distance au sommet ; il faut donc en conclure que c'est la solution particulière

$$\gamma = o$$

qu'il faut appliquer ici. Il résulte de là, que les arcs ED, KF, MC ont en D, F, C une courbure égale à zéro.

En ces points, on a :

$$dp = \pi\, dy_1\,, \quad du = o$$
$$\delta p = \pi\, \delta y_1\,, \quad \delta u = o.$$

Ces différentielles sont les mêmes pour la solution conique que pour la solution linéaire. Le long de la droite AC, les dérivées des fonctions p et u sont donc les mêmes pour les deux solutions séparées par cette droite ; la discontinuité n'affecte que les dérivées secondes.

On peut, quand il s'agit d'une solution conique, transformer la méthode générale de la manière suivante. On trace l'arc DE à une grande échelle et on en déduit l'arc FGK de même système ; on remplace alors l'arc DE par un arc semblable à FGK ; on efface ce dernier pour le construire avec plus d'exactitude en partant du premier arc perfectionné. On recommence plusieurs fois la même opération. Il est facile de démontrer que le problème est résolu lorsque les deux caractéristiques sont semblables. En effet, entre les deux caractéristiques, on a construit une solution du problème de l'équilibre des terres, mais on ignore si la solution est conique et il faut la prolonger dans les deux sens. Soit r le rapport de similitude des deux courbes ; appliquons le principe de similitude au massif compris entre les courbes, en prenant comme rapports de similitude :

$$r,\ r^2,\ r^3 \ldots\ r^{-1},\ r^{-2},\ r^{-3} \ldots$$

Il est facile de voir que l'on obtiendra la solution conique complète.

La solution conique présente, au sommet, une particularité remarquable ; la fonction u prend une infinité de valeurs. Si l'on

représente cette fonction par une surface, en portant ses valeurs en ordonnée suivant une perpendiculaire au plan, cette surface contiendra un segment de droite projeté au sommet. La fonction u est discontinue, mais la discontinuité n'existe qu'au bord de la solution ; c'est une discontinuité évanouissante analogue au ressaut évanouissant.

124. *Profil polygonal.* — Soient (fig. 76) AB et BC, deux côtés consécutifs du profil du terrain supposé polygonal. Le premier côté AB commande une solution linéaire limitée par les caractéristiques AE et BE ; le côté BC commande une solution linéaire limitée par les caractéristiques BF et CF. Nous devons alors construire une solution déterminée par les deux caractéristiques BE et BF de système opposé. Cette solution est une solution conique ; les caractéristiques de même système sont semblables et semblablement placées par rapport au sommet B. En appliquant la méthode générale, nous déterminerons le point G à l'intersection des caractéristiques KG et DG ; ces courbes seront d'abord déterminées assez grossièrement, mais en continuant l'application de la méthode générale, les caractéristiques seront déterminées avec une exactitude croissante. En passant du point K au point D, les caractéristiques tournent dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ; on obtient en G des directions intermédiaires ; les caractéristiques sont donc concaves vers le sommet B. La direction des caractéristiques est indéterminée au sommet de la solution conique ; si par B on fait passer un rayon tournant de BK en BD, la direction des caractéristiques varie en même temps que tourne ce rayon. La fonction u présente encore une discontinuité évanouissante.

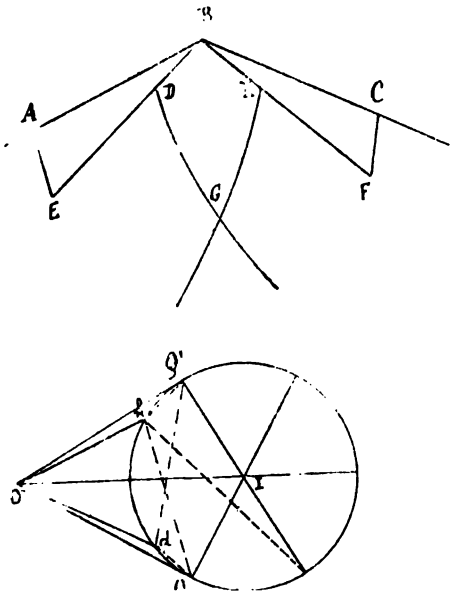

Fig. 76.

125. *Talus naturel.* — Soit d'abord (fig. 77) un profil polygonal BAC comprenant un côté AB ayant une inclinaison peu différente de celle du talus naturel. Le côté AB commande une solution linéaire ABE ; on trouve les directions des caractéristiques BE et AE par l'épure circulaire ; on reconnait facilement que l'angle BAE est très petit et que BE diffère peu de la verticale. Le côté AC commande la solution linéaire ADC. On doit alors construire la solution conique déterminée par les deux caractéristiques AD et AE. Nous avons représenté la construction des points F et f ; la première approximation donne H et h ; la seconde donne F et f ; les différences sont assez sensibles, parce que les courbures totales des arcs sont assez grandes.

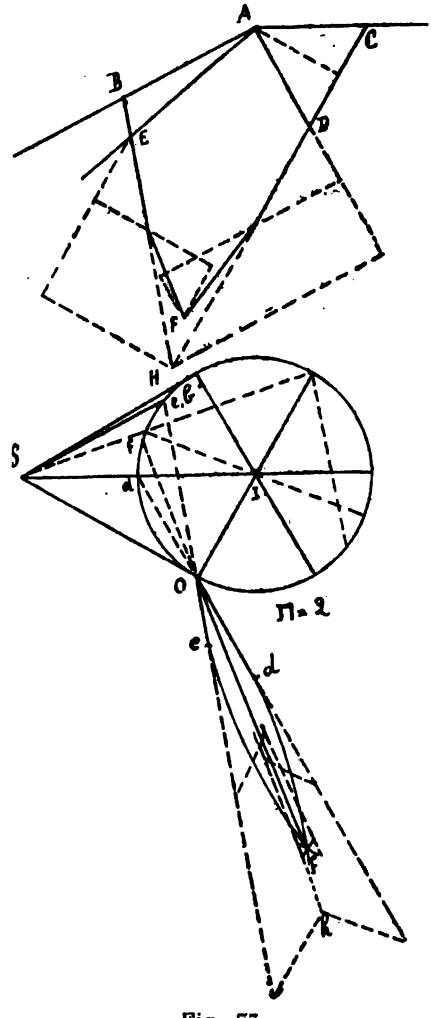

Fig. 77.

Supposons que le côté AB prenne la direction du talus naturel ; la solution ABE s'évanouit ; on obtient une solution composée de la solution linéaire ACD et d'une solution conique. Celle-ci est déterminée par la caractéristique AD et le talus naturel qui remplace AB ou AE et qui est aussi une caractéristique.

On voit que sous un talus plan, il règne, en général, une solution linéaire commandée par ce talus ; mais le talus naturel fait exception. La solution qui règne sous un talus naturel est indéterminée ; elle dépend du profil du terrain qui termine le talus naturel. Parmi ces solutions, la solution linéaire à caractéristiques rectilignes est

celle qui correspond au talus naturel indéfini ; les caractéristiques d'un système sont verticales, les autres sont parallèles au talus naturel. Si l'on suit une caractéristique verticale qui est du premier système, dans le cas du second talus naturel, on trouve la loi des pressions par l'équation :

$$dp = \Pi\, dy_1 \ , \quad p = \Pi\, y_1 \ .$$

Nous désignons par y_1 la distance du point considéré au premier talus naturel mené par l'origine supérieure de la caractéristique que nous avons suivie ; mais c'est aussi la distance du point considéré au talus naturel réalisé.

Soit (fig. 78) TRV le profil du terrain comprenant une ligne horizontale TR et le talus naturel RV. Le côté TR commande une solution linéaire limitée à la caractéristique RU. Il s'agit de construire la solution déterminée par les deux caractéristiques RU et RV ; la pression p sur la caractéristique rectiligne RU est donnée par la formule

$$p = \Pi\, y_1 \ ;$$

la pression sur la caractéristique RV est égale à zéro. On obtient successivement par la méthode générale, les points A, B, C, puis D, E, F, puis G, H et I ; les points correspondants de l'épure des pressions sont désignés par les petites lettres de même nom.

Menons une ligne horizontale V'U' et déterminons les fonctions p et u le long de cette ligne. La solution est conique ; on connaît les pressions aux points C, B, E, H, G, I ; on en déduit par une quatrième proportionnelle, les pressions aux points correspondants de la ligne V'U' ; ces pressions sont représentées par la courbe V' U' tracée au bas de l'épure : cette courbe peut être considérée comme la coupe horizontale de la surface conique qui représente la fonction p. On peut mener les tangentes à cette courbe aux points U' et V'. Nous démontrerons, comme au numéro 123, que les dérivées des fonctions p et u aux points des caractéristiques RU et RV sont les mêmes que dans les solutions linéaires ; les tangentes dont il s'agit sont les coupes des surfaces planes qui représentent la fonction p dans ces solutions linéaires. Au point U' la tangente est horizontale ; au point V', on obtient la tangente en déterminant la pression en un point de U'V', dans la solution linéaire qui correspond au talus naturel.

Nous pourrions aussi représenter la fonction u en la portant en ordonnée comme la fonction p ; mais nous avons préféré déterminer,

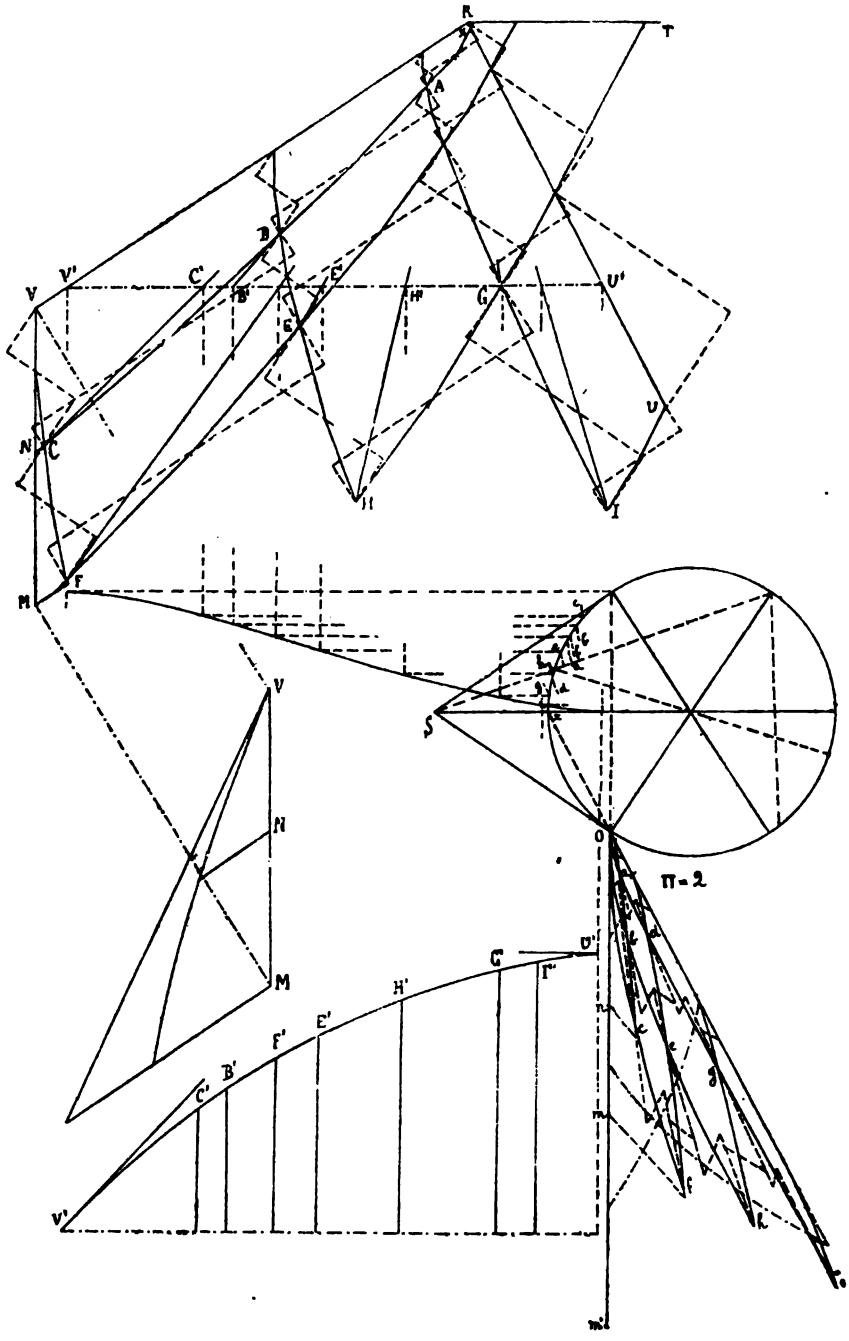

Fig. 78.

par une courbe, les pôles des facettes. Au point C', la fonction u a la même valeur qu'au point C ; le pôle des facettes est le point c de l'épure circulaire ; nous prendrons comme point de la courbe l'intersection de la verticale du point C' et de l'horizontale du point c. Cette courbe permet de trouver immédiatement le pôle des facettes pour un point quelconque du plan, et par conséquent les directions des caractéristiques et la fonction u. Aux points U' et V',les dérivées de la fonction u sont nulles comme dans les solutions linéaires ; les tangentes à la courbe sont horizontales.

Lorsqu'on construit les points des deux courbes, on est frappé de voir tous ces points se disposer sur des courbes d'une grande régularité ; c'est une preuve de l'exactitude de la méthode d'intégration graphique.

Prenons le point V comme centre du similitude ; adoptons un rapport croissant indéfiniment ; le point R s'éloignera de plus en plus ; la courbe VF sera remplacée par une courbe semblable qui aura pour limite la verticale VM. Si le point R s'éloigne à l'infini, on retrouve la solution linéaire à caractéristiques rectilignes.

Supposons un mur vertical VM ; on obtiendra la poussée sur le mur en construisant la solution MVF déterminée par la caractéristique VF et le mur VM. Cette solution disparaît si le point R s'éloigne à l'infini ; la solution linéaire règne sur le mur. Nous avons transporté le mur VNM vers la droite et vers le bas de l'épure, afin de représenter les pressions sur le mur. La courbe représente les pressions pour le cas de l'épure ; la droite représente les pressions pour le cas du talus naturel indéfini ; on voit que la différence est assez sensible.

Proposons-nous de déterminer les pressions sur un mur AB (fig. 79) en supposant un talus naturel AC en pente vers les terres. Il s'agit de construire une solution déterminée par la caractéristique AC et le mur AB ; cette solution est conique. Si le profil du terrain était une droite menée par A dans l'angle C'AC formé par les deux talus naturels, on se trouverait dans le cas du numéro 123 ; on obtient alors une solution linéaire et une solution conique. La direction de la caractéristique de séparation est donnée par l'épure circulaire ; on reconnaît facilement que si la droite qui limite la section du terrain tourne dans un sens, la caractéristique de séparation tourne en sens contraire. Nous savons que si le profil du terrain est la droite indéfinie AC', la caractéristique est verticale ; la solution conique disparaît si le mur est vertical. Si la droite limite tourne de AC' vers AC, la solution conique occupe un angle de plus en plus

grand ; pour la droite AC, la solution conique règne dans toute l'étendue du massif, la solution linéaire disparait. C'est dans ce cas que la courbure totale de la caractéristique CB est la plus grande.

Pour dresser l'épure, nous avons commencé par tracer une caractéristique du second système près du point A, en admettant, comme au numéro 123, que les longueurs des tangentes extrêmes limitées à

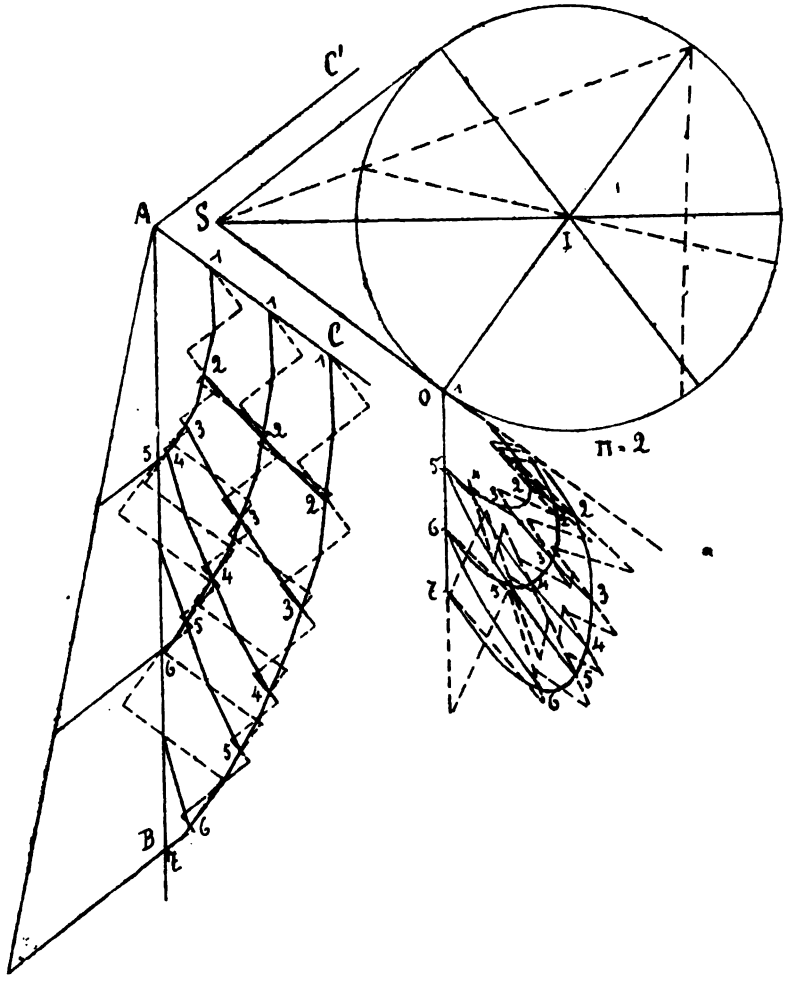

Fig. 79.

leur intersection sont dans le rapport de un à deux ; mais nous avons trouvé que la courbure était trop grande pour intégrer l'équation des pressions par un seul arc. Nous avons tracé la courbe 1, 2, 3, 4, 5 au pistolet, puis nous avons divisé l'arc en quatre segments de même courbure totale et nous avons déterminé les pressions. Nous avons alors construit par la méthode générale les points de la caractéristique 1, 6, et ceux de la caractéristique 1, 7.

On constate que les caractéristiques ne sont pas rigoureusement semblables ; la différence est surtout sensible pour les courbes de l'épure des pressions ; la forme de la caractéristique 1,6, est manifestement différente de la courbe 1,5 ; mais la troisième courbe est déjà presque semblable à la seconde. En représentant les pressions sur le mur, on trouve que les extrémités sont approximativement sur une droite passant par A. Cette droite est la solution du problème.

On voit, par cet exemple, que les erreurs commises dans le tracé de la première caractéristique s'évanouissent assez rapidement ; cela est conforme aux lois de l'équilibre ; les erreurs de pression sont commises sur des surfaces de peu d'étendue en comparaison des surfaces sur lesquelles on détermine les pressions.

126. *Contour apparent et discontinuité finie.* — Dans l'étude du mouvement varié des eaux, nous avons vu (83 à 89) que les caractéristiques d'un même système peuvent se couper et envelopper une courbe qui forme le contour apparent des surfaces hydrauliques ; on trouve toujours une solution continue (mais irrégulière), qui satisfait aux équations aux dérivées partielles ; mais elle est physiquement impossible ; on doit y substituer une solution présentant une discontinuité ou onde finie ; le mascaret est une onde finie de cette espèce. Un phénomène analogue peut se produire dans l'équilibre limite d'un massif pulvérulent. Supposons (fig. 80) un profil de terrain concave vers le haut et comprenant deux droites AB et B'A' raccordées par une courbe BCB'. Nous supposons que CK est un axe de symétrie ; il suffit de dresser l'une des moitiés symétriques de l'épure. La droite AB commande la solution linéaire ABL ; la courbe BCB' commande une solution BDB' ; nous devons alors construire une solution déterminée par la caractéristique BL et la caractéristique BD prolongée ou remplacée par l'axe de symétrie DK. On applique la méthode générale et rien de particulier ne se présente dans la construction de la caractéristique EFGHK. On détermine alors successivement les points M, N, P, R ; on trouve, que les caractéristiques GN et HP se coupent en un point S ; la caractéristique ER présente des arcs ordinaires LM et MN ; ensuite la courbe rebrousse de N en P ; elle rebrousse de nouveau de P en R. Nous avons construit, à gauche de

l'épure des pressions, l'élévation EMNPR de la caractéristique ; la

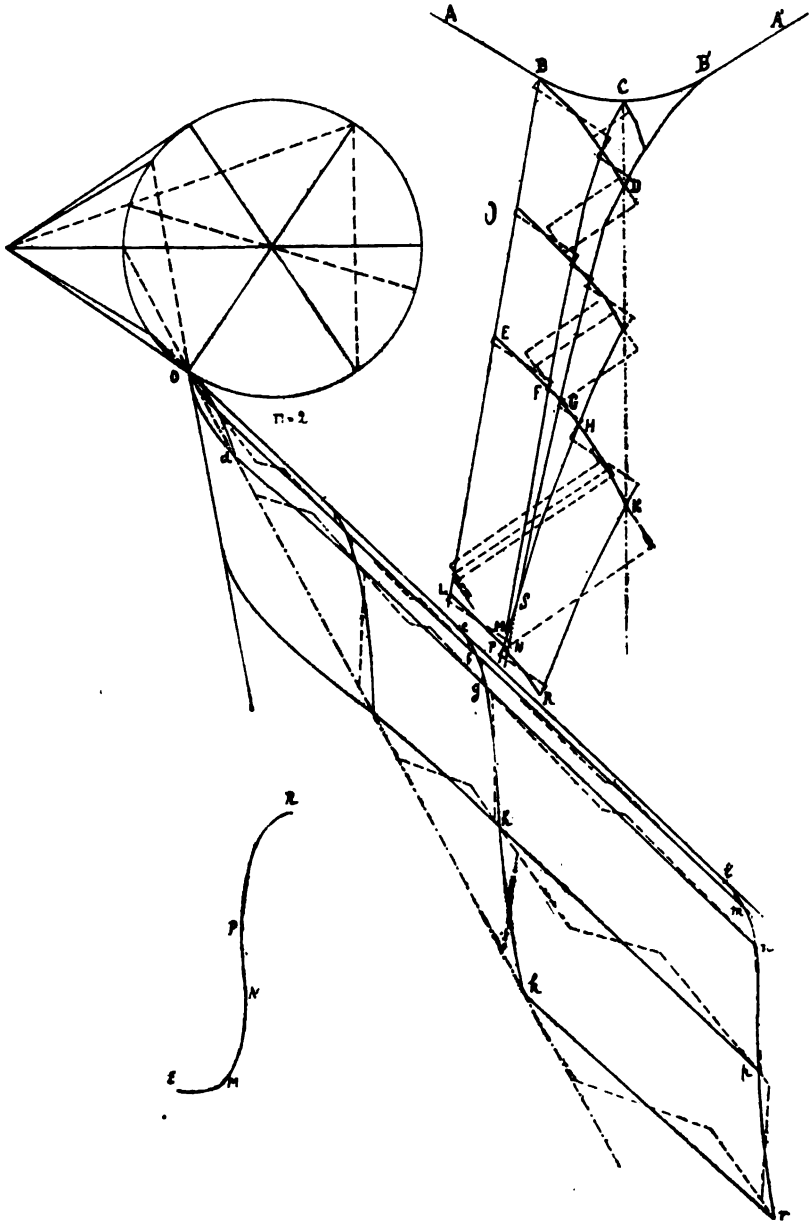

Fig. 80.

courbe a une inflexion et deux éléments normaux au plan de la

figure qui sont devenus verticaux par le rabattement ; la surface qui représente les pressions se décompose en trois nappes partielles ; la nappe supérieure qui vient de la droite, la nappe inférieure qui vient de la gauche, la nappe intermédiaire qui est séparée des deux autres par deux contours apparents dont l'un est visible, l'autre invisible. Si l'on construit de même une élévation de la caractéristique EK et des caractéristiques intermédiaires, on trouve que la tangente inflexionnelle devient verticale et se projette en un point S qui est le point de rebroussement du contour apparent. On obtient approximativement ce point en cherchant le point d'intersection de trois caractéristiques consécutives du second système. On peut démontrer que la branche invisible du contour apparent vient de l'infini. En appliquant la loi des courbures le long de la caractéristique BL, on trouve que la courbure est nulle, sauf au point B ; la caractéristique BL ne touche pas le contour apparent.

Cette solution continue est physiquement impossible, car on ne peut pas avoir trois pressions différentes au même point ; la véritable solution du problème est une solution à deux nappes séparées par une discontinuité finie. Nous étudierons plus loin les lois de la formation et de la propagation d'une discontinuité de cette espèce. Nous nous contenterons ici d'en expliquer la possibilité. De chaque côté de la ligne de discontinuité, la pression sur la surface de séparation doit évidemment être la même, mais les deux demi-ellipses de pression sont différentes ; les fonctions p et u subissent des accroissements finis en traversant la ligne de discontinuité.

Supposons (fig. 81) deux talus plans faisant un angle rentrant ABC. On doit construire une solution conique déterminée par les deux caractéristiques BD et BE formant un angle plus petit que $2a$, complément de l'angle du frottement. Menons les caractéristiques HK, FK, et déterminons le point K. Construisons ensuite, par la méthode générale, la caractéristique KM, de même système que HD, et la caractéristique KN de même système que FE ; on trouve que KM coupe HD et que KN coupe FE. On

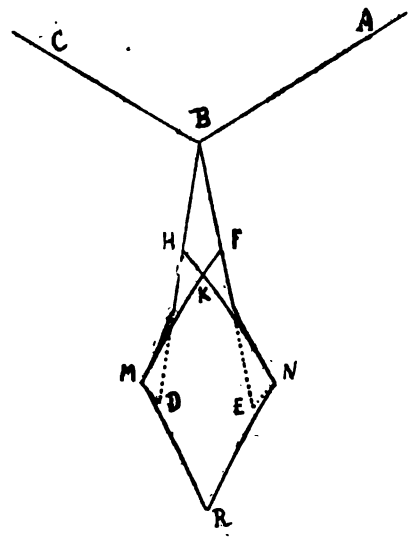

Fig. 81.

construit ensuite le quadrangle MKNR. Il y a évidemment deux contours apparents; si on détermine les courbures en H et en F, en remplaçant les arcs HK et KF par des arcs de cercles, on pourra appliquer la loi des courbures trouvée au numero 115 et déterminer les points où les caractéristiques BD et BE touchent leur enveloppe. La solution ainsi obtenue n'est pas une solution conique ; cela provient de ce que nous avons déterminé HK et KF en nous contentant d'une approximation assez grossière. En substituant à ces arcs des courbes semblables à DMR et ENR, nous obtiendrons une solution plus exacte, et en continuant nous nous rapprocherons de la véritable solution qui présensentera deux contours apparents rectilignes et passant par le sommet B. Il est assez inutile de construire exactement cette solution, car elle ne peut pas être réalisée ; c'est la solution présentant deux discontinuités finies qu'il faut construire ; nous reprendrons plus loin cette question. Nous pourrions appliquer ces considérations au problème de la butée des terres ; on reconnait que pour la butée des terres, ce sont les profils convexes vers le haut qui donnent lieu à la production de contours apparents ou de discontinuités finies.

§ 5. PROBLÈME DES DEUX MURS. SOLUTION CYLINDRIQUE.

127. *Problème des deux murs.* Nous nous proposons de chercher les pressions qui se développent dans un massif de terre compris entre deux murs perpendiculaires à un même plan de symétrie. Soient (fig. 82) AE, A'E' les parois des deux murs, AA' la surface du terrain. La ligne AA' commande une solution ABA' qui est linéaire, si le profil du terrain est rectiligne. On construit alors la solution déterminée par la caractéristique AB et le contour apparent AC ; sur la hauteur AC, la pression est la même que si le second mur n'existait pas. On construit de même la solution A'BC'. On construit ensuite la solution déterminée par les deux caractéristiques CB et BC' ; elle est limitée par le quadrangle CBC'D ; puis on construit les solutions CDE et C'DE' déterminées chacune par une caractéristique et un contour apparent. On continue indéfiniment de la même manière.

Cette méthode s'applique au cas où les profils du terrain et des murs sont quelconques ; mais nous allons traiter le cas où les parois des murs sont verticales et la surface du terrain horizontale. Alors il y a un axe de symétrie XY, le long

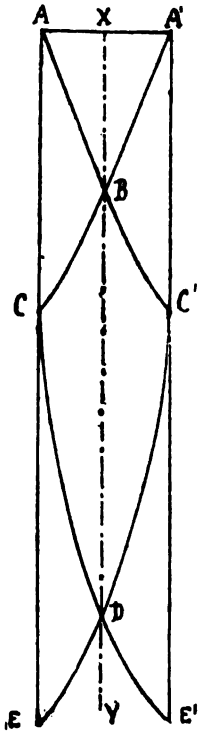

Fig. 82.

duquel on connait les directions des caractéristiques ; on peut se borner à dresser la moitié de l'épure.

Nous avons représenté fig. 83 les résultats que nous avons obtenus ; pour diminuer la hauteur du dessin, nous avons coupé l'épure en deux parties par le plan HY et nous avons relevé la partie inférieure au niveau de la première partie. Les caractéristiques qui

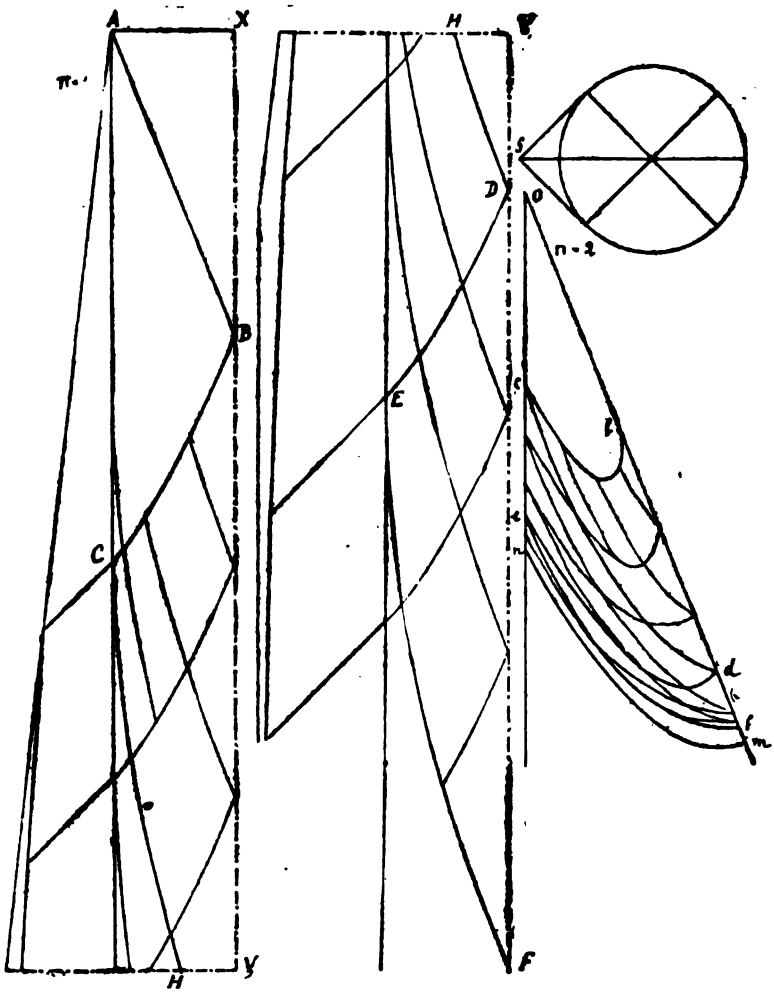

Fig. 83.

séparent les solutions régulières sont représentées par un trait plus fort ; ce sont AB, BC, CH qui est prolongée en HD, DE et EF. Les

courbes correspondantes de l'épure des pressions sont *ob*, *bc*, *cd*, *de* et *ef*. Nous avons ensuite porté en grandeur et direction, les pressions sur le mur ; l'échelle des pressions est deux fois plus petite, dans cette représentation, que dans l'épure des pressions. Les pressions sur le mur varient d'abord proportionnellement à la hauteur des terres ; on sait, en effet, que la solution ABC est une solution conique. En dessous du point C, la pression croit de plus en plus lentement ; le dessin indique que les pressions tendent vers une certaine limite. L'épure des pressions montre également que, dans toute l'étendue du massif, la variation des pressions avec la hauteur devient de plus en plus faible. Ainsi, quand on parcourt BCD, on trouve des pressions représentées par les courbes *bcd* ; l'accroissement de pression est *bd*. Quand on parcourt DEF, l'accroissement de pression n'est plus que *df*. En continuant, on trouve des accroissements de plus en plus petits, et les courbes analogues à *de* et *ef* tendent vers une limite commune telle que *nm*. Il résulte donc du dessin, que les solutions qui se succèdent tendent vers une solution où les pressions et les fonctions p, u sont indépendantes de l'altitude. Les pressions ou les fonctions p et u sont alors représentées par des cylindres à génératrices verticales. Nous ne pouvons pas démontrer l'asymptotisme, nous le constatons ; mais nous pouvons déterminer mathématiquement la solution cylindrique.

128. *Solution cylindrique verticale.* — Prenons l'axe de symétrie comme axe des y et appliquons les équations générales de l'équilibre :

$$\frac{1}{4}\,(p_{yy} - p_{xx})^2 + p_{xy}^2 = \frac{1}{4}\,(p_{yy} + p_{xx})^2 \sin^2\varphi \qquad (11),$$

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (12),$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = \Pi \qquad (13).$$

Nous devons chercher une solution où les pressions sont indépendantes de y ; nous poserons donc :

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = 0.$$

Les équations (12) et (13) peuvent alors être intégrées ; on trouve :

$$p_{xx} = \alpha$$

$$p_{xy} = \Pi\, x + \beta.$$

Nous déterminerons les constantes en exprimant que, sur les deux murs, la pression fait avec la normale l'angle du frottement ; soit 2λ la distance des deux murs ; on pose :

pour $x = -\lambda$, $p_{xy} = -p_{xx}$ tang φ,

pour $x = \lambda$, $p_{xy} = p_{xx}$ tang φ.

Ces deux équations donnent :

$$\alpha = \frac{\Pi\,\lambda}{\text{tang}\,\varphi}\,,\quad \beta = o$$

On a donc :

$$p_{xx} = \Pi\,\lambda\,\text{cotg}\,\varphi \qquad (38),$$

$$p_{xy} = \Pi\,x \qquad (39).$$

En remplaçant x par $\pm\,\lambda$, on obtient les composantes de la pression sur les murs ; la pression elle-même est donnée par :

$$p = \Pi\,\lambda\,\sqrt{1 + \text{cotg}^2\,\varphi} = \frac{\Pi\,\lambda}{\sin\varphi} \qquad (40).$$

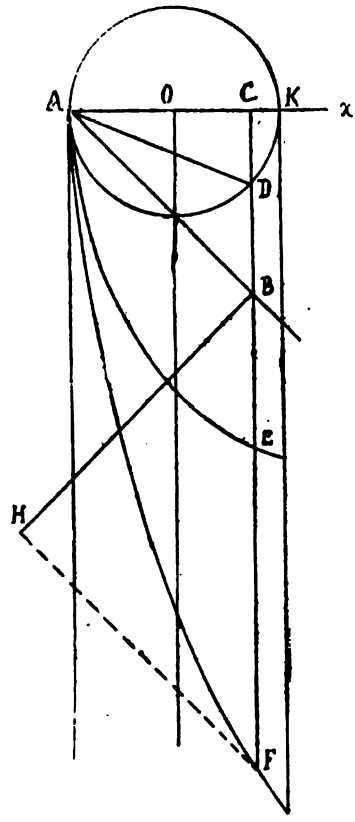

Fig. 84.

On arrive directement à cette formule en exprimant l'équilibre du massif compris entre les murs, deux plans horizontaux à l'unité de distance, et deux plans verticaux parallèles au plan de la figure et distants de l'unité. Les pressions sur ces deux systèmes de plans parallèles se font directement équilibre ; il doit donc y avoir équilibre entre le poids du massif et les réactions du mur ; on obtient les pressions sur les murs en décomposant le poids du massif suivant les directions connues des pressions à déterminer ; on retrouve la formule (40).

Il reste à calculer p_{yy} ; on l'obtient par la formule (11), qui donne :

$$\frac{p_{yy}}{\Pi\,\lambda} = \frac{1 + \sin^2\varphi}{\sin\varphi\,\cos\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}\sqrt{1 - \frac{x^2}{\lambda^2}} \qquad (41).$$

On trouve deux valeurs pour cette pression ; on peut les représenter par un cylindre du second degré ; les murs forment le contour apparent ; c'est la nappe supérieure qui donne la solution du problème, car on voit facilement, dans la figure 83, que les pressions diminuent quand on s'approche du contour apparent.

129. *Caractéristiques.* — Nous avons trouvé, au numéro 107, l'équation différentielle des caractéristiques sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2p_{xy} \pm (p_{xx} + p_{yy}) \sin\varphi \cos\varphi}{-[p_{xx} - p_{yy} + (p_{xx} + p_{yy}) \sin^2\varphi]} \qquad (16).$$

Nous obtiendrons la caractéristique du premier système, en prenant le signe supérieur ; en remplaçant les pressions par leurs valeurs tirées des équations (38), (39) et (40), on trouve :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{\lambda - x}{\lambda + x}}.$$

Intégrons et déterminons la constante en exprimant que la caractéristique passe par le point :

$$x = -\lambda, \qquad y = 0 ;$$

nous trouvons :

$$y = (x + \lambda)\operatorname{tang}\varphi + \frac{\lambda}{\cos\varphi}\arccos\frac{-x}{\lambda} + \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{1 - \frac{x^2}{\lambda^2}}$$

On obtient les autres caractéristiques du même système en ajoutant une constante arbitraire.

On trouve les caractéristiques du second système en prenant le signe inférieur ; on trouve les mêmes équations, sauf qu'il faut changer le signe de x ; les caractéristiques du second système sont donc symétriques de celles du premier.

On construit facilement ces caractéristiques en transformant une cycloïde. Posons :

$$z = [y - (x + \lambda)\operatorname{tang}\varphi]\cos\varphi.$$

Les équations précédentes deviennent :

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{\lambda - x}{\lambda + x}},$$

$$z = \lambda \arccos \frac{-x}{\lambda} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{\lambda^2}}.$$

Traçons, de l'origine comme centre, une circonférence de rayon λ ; on a (fig. 84) :

$$AC = \lambda + x$$

$$CD = \sqrt{\lambda^2 - x^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{CD}{AC},$$

La tangente à la courbe (z, x) est donc parallèle à AD.
Si on fait rouler la circonférence sur la droite

$$x = \lambda,$$

le point A décrit une cycloïde qui satisfait précisément à cette propriété et qui est donc l'une des courbes cherchées. On arrive aussi à ce résultat en cherchant l'équation finie de cette cycloïde ; on retrouve la courbe (z, x). Soient : AB, la droite

$$y = (x + \lambda) \operatorname{tang} \varphi ;$$

E un point de la cycloïde. On obtiendra un point F de la caractéristique, en prenant :

$$BF = \frac{CE}{\cos \varphi}$$

ou

$$BH = CE.$$

On peut aussi faire rouler, sur une verticale, une circonférence de rayon

$$\frac{\lambda}{\cos \varphi} ;$$

alors BF est l'ordonnée de la cycloïde ; les abscisses de la cycloïde se portent sur la droite AB.

130. *Épure des pressions.* — Nous déterminerons les fonctions p et u en transformant les équations (38) et (39) au moyen des équations du numéro 109 ; on trouve :

$$\frac{p}{\cos\varphi} + p \operatorname{tang}\varphi \cos 2u = \Pi\,\lambda \operatorname{cotg}\varphi$$

$$p \operatorname{tang}\varphi \sin 2u = \Pi\, x.$$

La première donne l'équation de la courbe (p, u) ; on a :

$$p = \Pi \frac{\lambda \cos^2\varphi}{\sin\varphi\,(1 + \sin\varphi \cos 2u)} \qquad (42).$$

On construit facilement le dénominateur en projetant les rayons d'une circonférence ; on obtient alors p par une troisième proportionnelle ; c'est de cette manière que nous avons construit la courbe mn de la figure 83.

On peut aussi éliminer u des deux équations précédentes ; on obtient l'équation de la surface cylindrique qui représente la fonction p ; c'est un cylindre du second degré.

Enfin, en éliminant p, on trouve la fonction u ; on obtient :

$$\frac{\cos(u + a)}{\cos(u - a)} = \sqrt{\frac{\lambda - x}{\lambda + x}}$$

On en déduit facilement

$$\operatorname{tang}(u + a) \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}(u - a) ;$$

ce sont les coefficients angulaires de la caractéristique ; on retrouve les valeurs déjà trouvées ; mais le radical doit être pris avec le signe moins.

131. *Solution cylindrique inclinée.* — Nous pouvons supposer un massif de terre compris entre deux murs parallèles faisant un certain angle θ avec l'horizon ; en construisant l'épure, on constaterait, sans doute, que les pressions sur une même parallèle au mur tendent vers une certaine limite ; nous sommes ainsi conduit a chercher s'il existe une solution où les pressions, la fonction p et la fonction u sont représentées par des cylindres obliques. Prenons pour axe des y, un axe situé à égale distance des deux murs ; l'axe des x sera perpendiculaire à l'axe des y. Les équations de l'équilibre du

massif que nous avons établies au numéro 101 ne sont plus applicables ; le poids de l'unité de volume donne, sur les axes des x et des y, les deux projections

$$- \Pi \cos \theta \quad \text{et} \quad \Pi \sin \theta ;$$

on trouve facilement que les équations deviennent :

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = - \Pi \cos \theta$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = \Pi \sin \theta$$

Cherchons une solution où les pressions sont indépendantes de y ; on a :

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = 0.$$

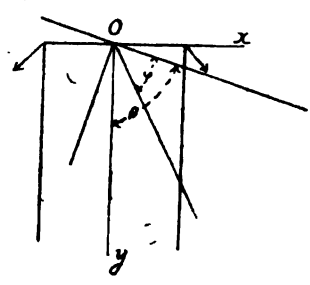

Fig. 85.

Les équations de l'équilibre peuvent être intégrées ; on trouve :

$$p_{xx} = - \Pi x \cos \theta + \alpha$$

$$p_{xy} = \Pi x \sin \theta + \beta$$

Nous déterminerons les constantes en exprimant que, sur les deux murs, la pression fait avec la normale l'angle du frottement ; soit 2λ, la distance des murs ; nous posons

$$\text{pour } x = - \lambda , \quad p_{xy} = - p_{xx} \operatorname{tang} \varphi,$$

$$\text{pour } x = + \lambda , \quad p_{xy} = p_{xx} \operatorname{tang} \varphi.$$

Ces deux équations donnent

$$\alpha = \Pi \lambda \sin \theta \operatorname{cotg} \varphi,$$

$$\beta = - \Pi \lambda \cos \theta \operatorname{tang} \varphi.$$

On a donc :

$$p_{xx} = - \Pi x \cos \theta + \Pi \lambda \sin \theta \operatorname{cotg} \varphi \qquad (43),$$

$$p_{xy} = \Pi x \sin \theta - \Pi \lambda \cos \theta \operatorname{tang} \varphi \qquad (44).$$

Nous calculerons p_{uu} par l'équation (11) rappelée au numéro 128 ; nous trouvons :

$$\frac{p_{uu}}{\Pi\lambda} = \frac{1+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\left(\sin\theta\cot g\,\varphi - \frac{x}{\lambda}\sin\theta\right) + \frac{2}{\cos^2\varphi}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)\sin(\theta-\varphi)\sin(\theta+\varphi)} \quad (45).$$

On reconnait facilement que l'équation (16), qui donne les directions des caractéristiques et que nous avons rappelée au numéro 129, est encore applicable ; car les seconds membres des équations de l'équilibre n'y figurent pas. En remplaçant les pressions par leurs valeurs, on trouve après quelques calculs :

$$\frac{dy}{dx} = \pm\,\text{tang}\,\varphi \pm \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{\sin(\theta\pm\varphi)}{\sin(\theta\mp\varphi)}}\sqrt{\frac{\lambda\mp x}{\lambda\pm x}}.$$

Le signe supérieur s'applique aux caractéristiques du premier système, le signe inférieur aux caractéristiques du second système. L'intégration donne :

$$y = \pm\,x\,\text{tang}\,\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{\sin(\theta\pm\varphi)}{\sin(\theta\mp\varphi)}}\left(\arccos\frac{\mp x}{\lambda} + \sqrt{1-\frac{x^2}{\lambda^2}}\right) + C.$$

Nous poserons encore :

$$y \mp x\,\text{tang}\,\varphi = z\,\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{\sin(\theta\pm\varphi)}{\sin(\theta\mp\varphi)}};$$

nous trouvons :

$$z = \arccos\frac{\mp x}{\lambda} + \sqrt{1-\frac{x^2}{\lambda^2}}$$

Les courbes (z, x) sont deux cycloïdes symétriques ; on reconnait que le radical de l'équation (45) doit être pris avec le signe plus, par les considérations produites au numéro 128 ; on doit prendre les

moitiés inférieures des deux cycloïdes. On doit alors multiplier les ordonnées z par le coefficient :

$$\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{\sin(\theta \pm \varphi)}{\sin(\theta \mp \varphi)}}.$$

et porter les ordonnées ainsi transformées à partir des droites :

$$y = \pm x \operatorname{tang}\varphi + C.$$

Les caractéristiques des deux systèmes ne sont plus symétriques ; on s'éloigne d'autant plus de la symétrie, que l'angle θ s'approche de l'angle φ ; car alors les ordonnées z doivent être multipliées par un nombre très grand pour les caractéristiques du premier système, et par un nombre très petit pour les caractéristiques du second système.

L'équation (45) ne donne une solution réelle que si l'on a :

$$\sin(\theta - \varphi)\ \sin(\theta + \varphi) \geqq 0$$

Cette condition s'interprète en disant que l'inclinaison des murs doit être comprise entre celles des deux talus naturel. Nous trouverons l'un des cas limite en prenant

$$\theta = \varphi ;$$

l'équation (45) devient linéaire. Ce résultat était à prévoir ; les murs ont alors l'inclinaison du talus naturel ; en supposant la pression nulle sur le mur supérieur, on a un talus naturel libre ; la solution linéaire correspondante est une solution cylindrique ; le cylindre se réduit à un plan. En s'approchant de ce cas limite, on trouve que les deux nappes partielles de la surface qui représente l'équation (45) tendent à s'appliquer l'une sur l'autre.

Nous pouvons encore introduire les fonctions p et u dans les équations (43) et (44) ; on obtient :

$$\frac{p}{\cos\varphi} + p \operatorname{tang}\varphi \cos 2u = -\Pi x \cos\theta + \Pi \lambda \sin\theta \operatorname{cotg}\varphi$$

$$p \operatorname{tang}\varphi \sin 2u = \Pi x \sin\theta - \Pi \lambda \cos\theta \operatorname{tang}\varphi.$$

En éliminant x, on trouve :

$$p = \frac{\Pi \lambda \sin(\theta + \varphi)\sin(\theta - \varphi)}{\sin\theta + \sin\varphi \sin(2u + \theta)} \qquad (46).$$

On peut aussi calculer p et u en fonction de x ; la fonction p est encore représentée par un cylindre du second degré dont on trouve facilement l'équation ; on trouve u en éliminant p entre les deux équations. Si on multiplie la première par $\sin\varphi$, la seconde par $\cos\varphi$ et si on divise la somme par la différence, on obtient, en prenant la racine carrée :

$$\frac{\cos(u-a)}{\cos(u+a)} = -\sqrt{\frac{\lambda+x}{\lambda-x}}\sqrt{\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin(\theta+\varphi)}}$$

Nous avons pris le radical avec le signe moins, parce que, dans la solution que nous cherchons, l'angle $u+a$ est plus grand qu'un droit.

Pour avoir la première caractéristique, on remarque que :

$$u+a = u-a+2a = u-a+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}(u-a),$$

$$\frac{\cos(u-a)}{\cos(u+a)} = \frac{1}{\sin\varphi - \operatorname{tang}(u-a)\cos\varphi}.$$

On obtient la seconde en remarquant que :

$$u-a = u+a-2a = u+a-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}(u+a),$$

$$\frac{\cos(u-a)}{\cos(u+a)} = \sin\varphi + \operatorname{tang}(u+a)\cos\varphi.$$

On retrouve les valeurs écrites plus haut.

(A continuer).

DEQUESNE-MASQUILLIER & FILS
25, Grand Rue, 25
LABOR
MONS

Malt 323 : 1/1
(Bryand)

Pièce fund

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

J. MASSAU
Ingénieur des Ponts et Chaussées, Profes-eur à l'Université de Gand.

TROISIÈME FASCICULE

Extrait des Annales des Ingénieurs sortis des Ecoles spéciales de Gand
1902, pp. 393-434 = 1903, pp. 383-436 = 1904, pp. 65-147

GAND,
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE E. VAN GOETHEM,
Rue des Foulons, 1, (près de l'Université).

1904

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

J. MASSAU

Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur à l'Université de Gand *

CHAPITRE IV *(Suite)*.

§ 6. SOLUTIONS CONIQUES.

132. *Equations différentielles.* — Nous avons déjà mis les équations de la solution conique sous la forme de deux équations différentielles et d'une équation finie (numéro 103). Nous obtiendrons ces équations sous une forme plus commode en partant des équations (23) et (24) du numéro 110 qui lient les fonctions p et u. Changeons de variables indépendantes en posant

$$x = \mathrm{R}\cos\theta,$$

$$y = \mathrm{R}\sin\theta.$$

Ce changement de variables indépendantes s'effectue par les règles connues. Nous poserons ensuite dans les nouvelles équations aux dérivées partielles

$$u = \mathrm{F}(\theta),$$

$$p = q\,\mathrm{R}.$$

* Voyez tome XXII, pages 85-214, et tome I, troisième série, pages 135-226.

Il ne restera plus que les dérivées des fonctions q et u par rapport à la variable θ ; on obtiendra les deux équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\left(\frac{dq}{d\theta} - 2q \operatorname{tang}\varphi \frac{du}{d\theta}\right) \sin(u - a - \theta) = -\Pi \cos(u + a) - q \cos(u - a - \theta) \tag{47},$$

$$\left(\frac{dq}{d\theta} + 2q \operatorname{tang}\varphi \frac{du}{d\theta}\right) \sin(u + a - \theta) = \Pi \cos(u - a) - q \cos(u + a - \theta) \tag{48}.$$

Nous pouvons aussi arriver à ces équations par une voie beaucoup plus rapide, en introduisant les nouvelles variables dans les équations différentielles des caractéristiques, c'est-à-dire dans les équations (20) et (22) du numéro 109. Pour la première caractéristique, nous avons :

$$dp = 2p \operatorname{tang}\varphi \, du - \Pi \, ds \cos(u + a).$$

Nous avons posé

$$p = q\,\mathrm{R} ;$$

on en déduit :

$$dp = \mathrm{R}\, dq + q\, d\mathrm{R}$$

Substituons et divisons ensuite l'équation de la caractéristique par $\mathrm{R}\, d\theta$, nous trouvons :

$$\frac{dq}{d\theta} + q \frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}d\theta} = 2q \operatorname{tang}\varphi \frac{du}{d\theta} - \Pi \frac{ds}{\mathrm{R}d\theta} \cos(u + a).$$

La tangente à la première caractéristique fait avec l'axe des x, l'angle $u - a$, et avec le rayon vecteur l'angle

$$u - a - \theta.$$

On a donc :

$$\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}d\theta} = \operatorname{cotg}(u - a - \theta),$$

$$\frac{ds}{\mathrm{R}d\theta} = \frac{1}{\sin(u - a - \theta)}.$$

On trouve alors facilement l'équation (47) ; on obtient l'équation (48), en transformant l'équation de la seconde caractéristique par des calculs analogues.

Résolvons les équations (47) et (48) par rapport aux dérivées; nous trouverons des équations de la forme :

$$\frac{dq}{d\theta} = \frac{Y}{X}, \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{Z}{X}.$$

Nous écrirons :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{X} &= \frac{dq}{Y} = \frac{du}{Z} \\ X &= -2\sin(u \quad a - \theta)\sin(u + a - \theta) \\ Y &= \Pi\cos\varphi\cos(2u - \theta) + q\sin(2u - 2\theta) \\ 2q\,Z\,\mathrm{tang}\,\varphi &= \Pi[\sin\theta - \sin\varphi\sin(2u - \theta)] - q\cos\varphi \end{aligned}\right\} (49).$$

On obtient d'abord les valeurs de Y et de Z sous des formes un peu différentes ; il y a quelques calculs faciles à effectuer ; on doit se souvenir que l'on a :

$$\varphi + 2a = \frac{\pi}{2}.$$

Nous nous occuperons plus loin des singularités qui se présentent lorsque l'on a :

$$X = Y = Z = 0$$

Ecartons provisoirement ce cas. On sait qu'alors les équations (49) ont une intégrale générale contenant deux constantes arbitraires que l'on peut déterminer en se donnant les valeurs initiales des fonctions inconnues ; on sait aussi que cette solution est continue par rapport à ces valeurs initiales.

On peut aussi introduire la pression p le long d'une caractéristique, en remplaçant dans les équations (49)

$$q \quad \text{par} \quad \frac{p}{R}.$$

Il y a alors une fonction inconnue de plus : c'est le rayon vecteur de la caractéristique ; mais il y a aussi une équation nouvelle qui est :

$$\frac{dR}{R\,d\theta} = \cot g\,(u \mp a - \theta).$$

En faisant varier les conditions initiales, la caractéristique se déforme donc continûment.

La solution linéaire que nous avons rencontrée précédemment (104) est aussi une solution conique ; nous devons la retrouver parmi les solutions des équations (49). Pour y arriver, voyons si l'on peut satisfaire à ces équations en supposant u constant ; posons

$$du = \frac{Z d\theta}{X} = 0 ;$$

nous trouvons :

$$q = \Pi \frac{\sin\theta - \sin\varphi \sin(2u - \theta)}{\cos\varphi} \qquad (50).$$

Il faut alors vérifier que cette valeur satisfait à l'équation :

$$\frac{dq}{d\theta} = \frac{Y}{X} ;$$

c'est ce que l'on constate après des calculs assez longs mais qui ne présentent aucune difficulté.

133. *Courbure des caractéristiques.* — Nous nous proposons de calculer les rayons de courbure r et ρ des deux caractéristiques en un point A du plan (fig. 86). On a, pour la caractéristique du second système,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{du}{d\sigma},$$

$$\frac{d\sigma}{R d\theta} = \frac{1}{\sin(u + a - \theta)}.$$

En éliminant $d\sigma$, on tire la valeur de ρ d'une équation que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{R}{\rho \sin(u + a - \theta)} = \frac{du}{d\theta} = \frac{Z}{X}.$$

Soient : F le centre de courbure de la caractéristique AB du second système, E la projection de ce centre sur le rayon vecteur OA ; l'équation précédente donne :

$$\frac{R}{AE} = \frac{du}{d\theta} = \frac{Z}{X}.$$

On arrive au même résultat en prenant la caractéristique du pre-

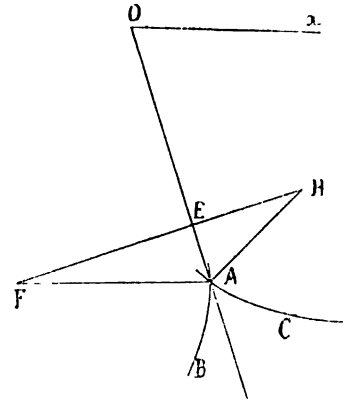

Fig. 86.

mier système. On en conclut que les centres de courbure des deux caractéristiques se trouvent sur une même perpendiculaire au rayon vecteur du point considéré.

En remplaçant les coefficients X et Z par leurs valeurs, nous trouvons :

$$\frac{R}{AE} = \frac{(p' - p)\cos\varphi}{-4\sin(u + a - \theta)\sin(u - a - \theta)\, p \operatorname{tang}\varphi}$$

Nous avons multiplié les valeurs de X et de Z par R, et nous avons posé :

$$p' = q'R = \Pi R \frac{\sin\theta - \sin\varphi \sin(2u - \theta)}{\cos\varphi} \qquad (51).$$

On voit par l'équation (50) que p' est la pression dans la solution linéaire qui admet la valeur de u au point A comme valeur constante de u.

L'équation qui donne le point E peut encore être simplifiée ; on a :

$$-\sin(u + a - \theta)\sin(u - a - \theta) = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{AE}{AH}.$$

En exprimant de deux manières la surface du triangle HAF, on obtient :

$$AF.\ AH\cos\varphi = HF.\ AE.$$

Le produit des sinus devient alors

$$-\sin(u + a - \theta)\sin(u - a - \theta) = \frac{AE}{HF}\cos\varphi.$$

En portant ce produit dans l'équation qui détermine AE, on obtient

$$\frac{R}{HF} = \frac{p' - p}{4p \operatorname{tang}\varphi} \qquad (52).$$

On peut facilement calculer ou construire HF et trouver les deux centres de courbure.

134. *Classification des nappes.* — Nous avons supposé, dans la figure 86, que le rayon vecteur se trouve dans l'angle aigu des caractéristiques ; cette disposition subsiste dans une certaine étendue du plan comprise entre deux rayons vecteurs ; à cet angle corres-

pond une certaine partie de la surface conique qui représente la pression p ; nous dirons que c'est une nappe de première espèce. Elle est caractérisée par la condition

$$X = -2 \sin (u + a - \theta) \sin (u - a - \theta) > 0.$$

Le signe de $du : d\theta$ est alors le signe de Z ; on a :

$$\text{pour } p < p', \quad \frac{du}{d\theta} > 0,$$

$$\text{pour } p > p', \quad \frac{du}{d\theta} < 0.$$

Dans le premier cas, que nous appellerons le cas des faibles pressions, les caractéristiques tournent leur concavité vers le sommet ; c'est ce que nous avons supposé dans la figure 86. Dans le cas des fortes pressions, les caractéristiques tournent leur convexité vers le sommet ; l'équation (52) donne alors une valeur négative HF ; on obtiendrait aussi une valeur négative de AE ; ces valeurs négatives indiquent que AE et HF changent de sens.

Nous dirons que la nappe est de seconde espèce, si l'on a en tous ses points

$$X = -2 \sin (u + a - \theta) \sin (u - a - \theta) < 0.$$

La dérivée de u est alors de signe contraire à Z ; on a

$$\text{pour } p > p', \quad \frac{du}{d\theta} > 0,$$

$$\text{pour } p < p', \quad \frac{du}{d\theta} < 0.$$

L'équation (52) est toujours applicable ; seulement les points F et H sont du même côté par rapport au rayon vecteur. En résumé, les caractéristiques tournent leur concavité vers le sommet pour les nappes de première espèce à faibles pressions et les nappes de seconde espèce à fortes pressions. Les caractéristiques tournent leur convexité vers le sommet dans les deux autres cas. La droite HF est dirigée suivant le rayon $\theta + \pi$, quand elle est positive ; elle change de sens en changement de signe.

135. *Intégration graphique.* — Lorsqu'on donne les valeurs ini-

tiales des fonctions inconnues, on peut appliquer, aux équations (49), plusieurs méthodes d'intégration approchée. On obtient une première approximation en supposant les accroissements égaux aux différentielles, on perfectionne le calcul en employant la méthode des trapèzes ou d'autres formules de quadrature approximative. On peut aussi résoudre la question en traçant la caractéristique d'un certain système ; on trace un petit arc de cette courbe en la remplaçant par son cercle de courbure ; on calcule la pression à l'extrémité de l'arc et on en déduit un second cercle de courbure ; on perfectionne le tracé de l'arc en utilisant les deux rayons de courbure ; on trace les arcs successifs de la même manière.

La méthode qui nous a paru la plus commode est la suivante : elle consiste à déterminer les arcs d'une caractéristisque par la méthode générale. On donne les fonctions p et u au point A (fig. 87) ; on les obtient immédiatement pour un second point B du rayon vecteur oA, car u ne change pas le long du rayon vecteur, et la pression varie comme la distance au sommet. En partant des points B et A, on détermine le point C situé à l'intersection des caractéristiques BC et AC et les fonctions p et u en ce point. On prend un second point D du rayon OC ; on en déduit un point E et ainsi de suite. Nous n'avons pas représenté l'épure des pressions.

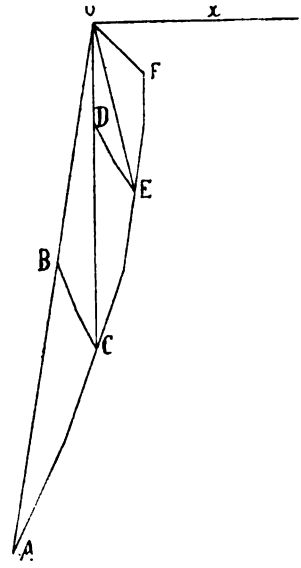

Fig. 87.

En continuant cette construction, on s'aperçoit que les rayons vecteurs forment, avec les caractéristiques du premier système, un angle de plus en plus petit ; on obtiendrait donc des arcs de plus en plus petits de la caractéristique du second système. Cela résulte de ce que, dans le cas que nous avons choisi, la solution se termine, à droite, par une caractéristique rectiligne OF.

Pour construire cette caractéristique, on essaie une position OF ; on remplace l'arc EF par deux tangentes ; on construit la pression en F de deux manières, en suivant l'arc EF, puis en suivant la caractéristique OF. Le problème est résolu, si l'on trouve la même pression. On trouvera généralement deux pressions différentes ; en déplaçant OF, les extrémités de ces deux pressions décriront deux

courbes qui se couperont à l'extrémité de la pression cherchée. En général, la position d'essai peut être assez rapprochée de la position exacte, pour que ces courbes puissent être remplacées par des droites.

D'autres dispositions peuvent se présenter : la caractéristique que l'on construit peut toucher le rayon vecteur, qui forme alors contour apparent ; elle peut aussi présenter un rebroussement en coupant le contour apparent. On obtient le point de contact ou de rebroussement par tâtonnements.

136. *Caractéristiques rectilignes.* — Nous avons écarté le cas où l'on a :

$$X = Y = Z = 0.$$

Dans ce cas les dérivées des fonctions inconnues se présentent sous une forme indéterminée. Nous allons chercher les valeurs des variables qui satisfont à ces trois équations ; nous les prendrons comme valeurs initiales et nous calculerons les intégrales dans les environs de ces valeurs.

La première équation donne :

$$X = -2 \sin(u - a - \theta) \sin(u + a - \theta) = 0 ;$$

on peut annuler le premier ou le second sinus ; on trouve les deux résultats :

$$u \mp a = 0.$$

Cette équation exprime que le rayon vecteur est une caractéristique ou un contour apparent. Si les valeurs de Y et de Z ne sont pas nulles, on trouve :

$$\frac{dq}{d\theta} = \frac{du}{d\theta} = \infty ;$$

le rayon vecteur est un contour apparent.

Si on égale Y et Z à zéro, on trouve deux équations qui se réduisent à une seule ; lorsqu'on remplace u par sa valeur tirée de la précédente, on obtient :

$$q = \mp \Pi \cos(\theta \pm 2a).$$

On arrive plus vite à ce résultat en partant des deux équations (47) et (48) ; ces équations donnent toujours des valeurs finies et

déterminées pour les dérivées, lorsque les sinus des premiers membres ne sont pas nuls. Si on annule le premier sinus, l'équation (47) donne des dérivées infinies qui deviennent indéterminées, lorsque le second membre est égal à zéro ; les deux équations se réduisent à la seconde. Si on annule le second sinus et le second membre de l'équation (48), les deux équations se réduisent à la première. On retrouve ainsi les deux valeurs de u et de q écrites plus haut.

Il est facile de reconnaitre que ces valeurs de la fonction q appartiennent à une caractéristique. Ainsi pour une caractéristique rectiligne du premier système, l'équation (20) du numéro 109 devient successivement:

$$dp = -\Pi\, ds \cos(u + a) = -\Pi\, d\mathrm{R} \cos(u + a),$$

$$p = -\Pi\, \mathrm{R} \cos(\theta + 2a),$$

$$q = -\Pi \cos(\theta + 2a).$$

Pour une caractéristique du second système, il faut changer le signe de Π et de a; on retrouve les valeurs précédentes. Ainsi donc les dérivées se présentent sous une forme indéterminée lorsque l'on donne une caractéristique rectiligne comme conditions initiales.

Pour fixer les idées, prenons, comme conditions initiales, une caractéristique du premier système ; les valeurs initiales satisfont aux deux équations :

$$u_0 - a - \theta_0 = 0,\quad q = -\Pi \sin(\theta_0 + 2a) \qquad (54).$$

Remplaçons, dans les équations (47) et (48),

$$u \text{ par } u_0 + u,$$

$$\theta \text{ par } \theta_0 + \theta,$$

$$q \text{ par } q_0 + q ;$$

les accroissements u, θ, q seront supposés assez petits pour être négligés vis-à-vis des quantités ordinaires. Les deux membres de l'équation (47) s'annulent pour les valeurs initiales ; pour les valeurs voisines, nous les réduirons au premier ordre ; comme si, u, θ, q étaient des infiniments petits ; nous trouverons :

$$\left(\frac{dq}{d\theta} - 2q_0 \operatorname{tang} \varphi \frac{du}{d\theta}\right)(u - \theta) = \Pi\, u \sin(2a + \theta_0) - q \qquad (55).$$

L'équation (48), dont les membres ne s'annulent pas pour les valeurs initiales, devient

$$\frac{dq}{d\theta} + 2q_0 \operatorname{tang} \varphi \frac{du}{d\theta} = \frac{\Pi \cos \theta_0 - q_0 \cos 2a}{\sin 2a} \qquad (56).$$

Intégrons, nous trouvons

$$q + 2q_0 \operatorname{tang} \varphi u = \frac{\Pi \cos \theta_0 - q_0 \cos 2a}{\sin 2a} \theta ;$$

la constante est nulle, car les deux membres se réduisent à zéro pour la caractéristique initiale. Eliminons q de la première équation différentielle, au moyen de l'intégrale qui précède ; de nombreuses réductions se produisent lorsqu'on tient compte de l'équation (54) ; on supprime le facteur commun

$$-4 q_0 \operatorname{tang} \varphi,$$

et l'on obtient l'équation

$$\frac{du}{d\theta} (u - \theta) = -u,$$

dont l'intégrale générale est :

$$\theta = u \log \frac{C}{u}.$$

Revenons aux anciennes notations, nous aurons :

$$\theta - \theta_0 = (u - u_0) \log \frac{C}{u - u_0} \qquad (57)$$

$$q - q_0 + 2q_0 \operatorname{tang} \varphi (u - u_0) = \frac{\Pi \cos \theta_0 - q_0 \cos 2a}{\sin 2a} (\theta - \theta_0) \qquad (58)$$

Il résulte de là que les solutions coniques qui ont une même caractéristique rectiligne dépendent d'une constante arbitraire ; il y en a une infinité. Cependant, l'indétermination des dérivées initiales n'est qu'apparente ; on tire en effet des équations précédentes :

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0 = \lim \frac{u - u_0}{\theta - \theta_0} = 0,$$

$$\left(\frac{dq}{d\theta}\right)_0 = \lim \frac{q - q_0}{\theta - \theta_0} = \frac{\Pi \cos \theta_0 - q_0 \cos 2a}{\sin 2a}.$$

Les dérivées des fonctions u et q et par conséquent les dérivées de la fonction p sont indépendantes de la constante ; elles sont les mêmes pour toutes les solutions coniques qui contiennent la caractéristique donnée. L'une de ces solutions est la solution linéaire ; on l'obtient en prenant

$$\log C = \pm \infty ,$$

car l'équation (55) donne alors

$$u = u_0 .$$

Si donc nous formons une solution irrégulière au moyen de deux solutions coniques ayant une caractéristique rectiligne commune, il n'y aura pas de discontinuités dans les dérivées premières. Pour avoir des discontinuités dans les dérivées premières, il faut que l'une au moins des deux solutions ne soit pas conique.

137. *Calculs complémentaires.* — On peut objecter, aux calculs précédents, que l'on ne connait pas l'influence, sur les intégrales, des petites erreurs commises dans les équations différentielles. Nous donnerons une signification plus précise aux résultats obtenus en ajoutant quelques calculs complémentaires.

En introduisant une variable auxiliaire, on peut mettre les équations (49) sous la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = X, \quad \frac{dq}{dt} = Y, \quad \frac{du}{dt} = Z.$$

Nous pouvons développer les seconds membres, par la formule de Taylor, en partant des valeurs initiales qui déterminent une caractéristique ; comme ces seconds membres sont nuls par ces valeurs initiales, on a :

$$\frac{d\theta}{dt} = a\ (\theta - \theta_0) + b\ (q - q_0) + c\ (u - u_0) + \ldots$$

Nous désignons encore par θ, q, u les accroissements, et nous aurons :

$$\frac{d\theta}{dt} = a\theta + bq + cu + \ldots$$

et deux autres équations semblables. Si d'abord on fait abstraction

des termes représentés par des points, on obtient trois équations linéaires que l'on sait intégrer par une méthode connue. On pose

$$x = \alpha\,\theta + \beta\,q + \gamma\,u$$

et l'on cherche dans quel cas, on a :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda\,x.$$

On trouve une équation cubique en λ et l'on obtient trois fonctions linéaires x, y, z, que l'on prend comme variables nouvelles ; les équations différentielles sont de la forme indiquée et s'integrent facilement.

On peut interpréter géométriquement la substitution linéaire qui conduit à l'intégration. Portons les variables θ, u, q en coordonnées cartésiennes ; on trouve un point M et un vecteur $\overline{OM}$. En portant les trois dérivées sur les trois axes, on obtiendra un autre vecteur $\overline{OM'}$ et l'on a :

$$\overline{OM'} = \varphi\,\overline{OM}.$$

Le symbole φ représente une fonction vectorielle linéaire ; elle exprime que les points M' forment un espace qui dérive de l'espace des points M par une affinité qui laisse en repos l'origine et le plan à l'infini. Par le point O, on peut mener trois droites doubles, telles que :

$$\overline{OA'} = \lambda\,\overline{OA},\ \overline{OB'} = \mu\,\overline{OB},\ \overline{OC'} = \nu\,\overline{OC};$$

ce sont des droites solutions. La substitution linéaire revient à prendre ces droites comme axes coordonnés.

Si l'on applique cette méthode au cas qui nous occupe, on trouve que nous sommes dans un cas doublement particulier : l'une des racines de l'équation cubique est nulle, les deux autres sont égales. A la racine nulle correspond un axe Ox tel que pour tout vecteur sur cet axe, on ait

$$\overline{OA'} = 0;$$

l'espace des points M' se réduit à un plan que nous prendrons comme plan des (y, z). A la racine double correspond une droite

que nous prendrons comme axe des y ; l'axe des z sera une droite quelconque du plan double. Les équations différentielles deviendront :

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = \mu y, \quad \frac{dz}{dt} = \nu y + \mu z.$$

Le coefficient de z dans la troisième équation doit être égal au coefficient de y dans la seconde, parce que ce n'est que dans ce cas que les droites doubles du plan des (y, z) viennent se confondre sur l'axe des y.

On peut alors remplacer :

$$\mu\, dt \text{ par } \frac{dt}{t},$$

en changeant de variable auxiliaire ; on a alors :

$$\frac{dx}{dt} = o, \quad t\frac{dy}{dt} = y, \quad t\frac{dz}{dt} = ny + z$$

Nous ne produisons pas le calcul de la substitution linéaire, parce qu'il s'effectue par des règles connues ; en outre, cette substitution peut se déduire très rapidement des résultats du numéro précédent. Dans les deux méthodes, nous avons admis la même approximation ; les résultats ne peuvent différer que par l'introduction de la variable auxiliaire.

Nous avons posé :

$$\frac{d\theta}{dt} = X = -2\sin(u - a - \theta)\sin(u + a - \theta).$$

En développant le second nombre, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} = -2(u - \theta)\sin 2a + \ldots$$

Nous changerons de variable auxiliaire de manière à obtenir en réduisant le développement à son premier terme :

$$t\frac{d\theta}{dt} = (\theta - u).$$

L'intégrale de l'équation (56) nous indique qu'en posant

$$q + 2q_0 u \text{ tang } \varphi - \frac{\Pi \cos \theta_0 - q_0 \cos 2a}{\sin 2a} \epsilon = 4 q_0 x \text{ tang } \varphi$$

nous aurons :

$$\frac{dx}{dt} = o.$$

L'intégrale de l'équation (56) nous a permis d'éliminer q de l'équation (55) ; si on reprend ce calcul en portant dans l'équation (55) la valeur de q tirée de l'équation précédente en fonction de u, θ et x, on arrivera au même résultat, sauf que le second membre aura en plus le terme :

$$— 4 q_0 x \text{ tang } \varphi,$$

terme qui se réduira à x, après la suppression du facteur commun. L'équation différentielle en u et θ sera donc remplacée par :

$$\frac{du}{d\theta} (u - \theta) = — u + x.$$

Posons :

$$y = u - x$$

et introduisons la variable auxiliaire, nous trouvons :

$$t \frac{dy}{dt} = y.$$

Introduisons cette valeur de u dans la première équation différentielle, nous trouvons :

$$t \frac{d\theta}{dt} = \theta - y - x.$$

Posons

$$\theta = z + x,$$

nous trouvons :

$$t \frac{dz}{dt} = - y + z.$$

En résumé, la substitution linéaire est définie par les équations :

$$q + 2q_0\, u \operatorname{tang} \varphi - \frac{\Pi \cos \theta_0 - q_0 \cos 2a}{\sin 2a} = 4\, q_0\, x \operatorname{tang} \varphi,$$

$$u = y + x,$$

$$\theta = z + x.$$

Les équations différentielles deviennent :

$$\frac{dx}{dt} = o,$$

$$t\,\frac{dy}{dt} = y,$$

$$t\,\frac{dz}{dt} = z - y.$$

Si on prend comme valeurs initiales :

$$t = x = y = z = o,$$

on trouve pour intégrales :

$$x = o,\ y = t,\quad z = -\,t \log t + t \log \mathrm{C}.$$

Nous aurions pu introduire une seconde constante et écrire

$$y = \mathrm{C}'\, t\,;$$

mais le nouveau résultat se ramène au précédent en changeant la variable auxiliaire.

Les équations de la substitution donnent :

$$\text{pour } x = o,\quad u = y,\quad \theta = z.$$

On a donc :

$$u = t,$$

$$\theta = -\,t \log t + t \log \mathrm{C},$$

d'où l'on retombe, en éliminant t, sur le résultat du numéro précédent.

Reprenons maintenant les équations complètes, où nous supposons X, Y, Z, remplacés par leurs développements convergents ; en appliquant la substitution linéaire, nous trouverons :

$$t\frac{dx}{dt} = o + \ldots.$$

$$t\frac{dy}{dt} = y + \ldots.$$

$$t\frac{dz}{dt} = z - y + \ldots.$$

Les fonctions inconnues ne sont pas développables par la formule de Taylor quand on prend t comme variable ; nous venons de voir, en effet, que le terme le plus important de la valeur de z est

$$-t\log t + t\log C.$$

Pour rendre ce développement possible, nous emploierons la méthode de M. Picard [1] qui consiste à chercher des intégrales ordonnées suivant les puissances de :

$$v = -t \qquad w = t\log t.$$

On obtient les équations aux dérivées partielles :

$$v\frac{dx}{dv} + w\frac{dx}{dw} - v\frac{dx}{dw} = o + \ldots.$$

$$v\frac{dy}{dv} + w\frac{dy}{dw} - v\frac{dy}{dw} = y + \ldots.$$

$$v\frac{dz}{dv} + w\frac{dz}{dw} - v\frac{dz}{dw} = z - y + \ldots.$$

En différentiant par rapport à v et par rapport à w, on trouve toutes les dérivées des fonctions inconnues pour les valeurs initiales

$$t = v = w = x = y = z = o,$$

sauf cependant :

$$\frac{dy}{dv} = \frac{dz}{dw}, \quad \frac{dz}{dv},$$

que l'on peut égaler à deux constantes ; nous avons vu que la pre-

[1] Traité d'Analyse, par Picard, t. III, pages 19 et 33.

mière constante peut disparaître en modifiant la variable auxiliaire; on prendra :

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dz}{dr} = -1, \qquad \frac{dz}{dv} = -\log C$$

et l'on obtiendra des développements dont les premiers termes sont les valeurs de x, y, z écrites plus haut. On démontre que ces développements sont convergents, en les comparant à ceux que l'on obtient pour

$$t\,\frac{dt}{dz} = \lambda z - y + \ldots$$

On peut donc démontrer que les fonctions q, u, θ peuvent s'exprimer par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de

$$t \quad \text{et} \quad t\log t.$$

Si t est suffisamment petit, on peut se borner aux premières puissances ; les erreurs relatives seront aussi petites que l'on veut. On obtient alors les équations (57) et (58) du numéro précédent.

138. *Génératrices d'arrêt.* — Soit OA (fig. 88) la caractéristique donnée ; nous la supposerons du premier système et nous donnerons une valeur positive à la constante C de l'équation (57). Si nous faisons croître u à partir de u_0, cette équation nous donne une valeur positive de $\theta - \theta_0$. Nous en concluons que la caractéristique du second système, partant d'un point A de la caractéristique rectiligne, est une courbe AB tournant sa concavité vers le sommet de la solution conique. Nous avons démontré (136) que les différentielles, au point A, des fonctions p et u sont les mêmes que dans la solution linéaire ; la courbure, au point A, est égale à zéro. On en déduit facilement que l'angle ε formé par le rayon vecteur et la courbe AB, décroit à partir du point A, car on a :

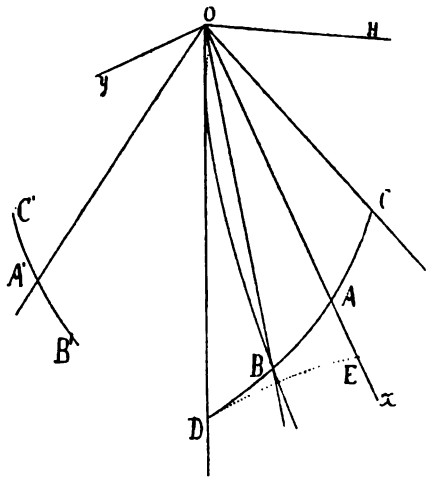

Fig. 88.

$$\varepsilon = u + a - \theta,$$
$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = -1.$$

L'angle OBA sera donc plus petit que l'angle 2α, si AB est suffisamment petit ; le rayon OB se trouvera dans l'angle aigu formé par les caractéristiques au point B ; il s'agit donc d'une nappe de première espèce. Elle est, en outre, à faibles pressions, parce que les caractéristiques sont concaves vers le sommet. Si dans l'espoir de prolonger cette nappe de l'autre côté de la caractéristique, nous faisons décroître u à partir de u_0, nous trouvons que l'accroissement de θ est imaginaire, car il s'exprime par le logarithme d'une quantité négative. Nous voyons donc que la caractéristique est une génératrice d'arrêt. On peut dire aussi, en supposant que l'observateur regarde vers le sommet, que cette caractéristique limite à droite une nappe de première espèce à faibles pressions.

Pour obtenir des valeurs décroissantes de θ, il faut prendre une autre solution et donner une valeur négative à la constante C. Alors l'accroissement de θ n'est réel que pour u décroissant. Les accroissements de θ et de u sont toujours de même signe ; la caractéristique de second système tourne encore sa concavité vers le sommet. La dérivée de l'angle ε a toujours la même valeur ; mais comme θ décroit, l'angle ε croit. Il résulte de là que le rayon OC, si AC est suffisamment petit, se trouve dans l'angle obtus formé par les caractéristiques au point C. La caractéristique du premier système limite alors, à gauche, une nappe de seconde espèce et à fortes pressions.

Nous pouvons appliquer le même raisonnement à une caractéristique rectiligne de second système ; l'équation (57) est applicable sans modification. Il faut remarquer que si on se plaçait de l'autre côté du plan, la caractéristique OA serait de second système ; en construisant une figure symétrique de celle que nous avons construite, par rapport à la verticale du sommet, nous obtiendrons la représentation d'une caractéristique rectiligne du second système et des nappes qu'elle limite. Les nappes à gauche deviennent les nappes à droite et réciproquement.

En résumé, les nappes à caractéristiques convexes vers le sommet n'ont pas de caractéristique rectiligne. Les caractéristiques rectilignes sont des génératrices d'arrêt. Les nappes de première espèce à faibles pressions peuvent être limitées à droite par une caractéristique rectiligne du premier système, à gauche par une caractéristique rectiligne du second système. Les nappes de seconde espèce à fortes pressions peuvent être limitées à gauche par une caractéristique rectiligne de premier système et à droite par une caractéristique rectiligne de second système.

139. *Caractéristiques voisines.* — On peut établir approximativement les équations des caractéristiques dans les environs d'une carac-

téristique rectiligne. Prenons (fig. 88) la caractéristique OA comme axe des x et un axe des y mené par O perpendiculairement à OA ; soient (x, y) les coordonnées d'un point B d'une caractéristique de même système que OA ; on peut écrire approximativement :

$$\frac{y}{x} = \theta - \theta_0,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = u - u_0.$$

L'équation (57) devient :

$$\frac{y}{x} = y' \log \frac{C}{y'}.$$

Cette équation est homogène ; on peut l'intégrer par la méthode connue. On peut aussi la ramener à une équation de Clairaut en prenant $\log x$ pour variable indépendante ; posons donc :

$$\frac{dy}{d \log x} = y' x = v ;$$

on obtient

$$y = v \log \frac{Cx}{v}$$

et en différentiant

$$dv \left(\log \frac{Cx}{v} - 1 \right) = 0.$$

En égalant le premier facteur à zéro, on trouve

$$v = C',$$

ce qui donne l'intégrale générale

$$y = C' \log \frac{Cx}{C'}.$$

En égalant le second facteur à zéro, on trouve

$$v = \frac{Cx}{e},$$

ce qui donne l'intégrale singulière

$$y = \frac{Cx}{e}.$$

Si dans l'intégrale générale, on fait croître x indéfiniment, on obtient :

$$y = \infty, \quad \lim \frac{y}{x} = 0.$$

Les caractéristiques du premier système forment une famille de courbes homothétiques qui ont une branche infinie sans asymptote, et pour laquelle la tangente à l'infini est parallèle à la caractéristique rectiligne.

La solution singulière représente une droite tangente aux caractéristiques du premier système ; c'est un contour apparent. Mais les résultats de cette analyse ne peuvent être acceptés comme approximatifs que si cette droite fait un angle très petit avec la caractéristique rectiligne. On retrouve aussi ce contour apparent en discutant l'équation (57) ; on trouve facilement que $\theta - \theta_0$ passe par un maximum pour

$$u - u_0 = \frac{C}{e^2},$$

ce qui donne

$$\theta - \theta_0 = \frac{C}{e}.$$

On trouve aussi

$$\theta - \theta_0 = o, \text{ pour } u \to u_0 = C.$$

On trouve le minimum de l'angle

$$\varepsilon = a + u - \theta,$$

en prenant

$$u - u_0 = \frac{C}{e^2},$$

ce qui donne

$$\varepsilon = 2a - \frac{C}{e^2}.$$

La caractéristique du second système ABDE présente un rebroussement sur le contour apparent. On peut aussi établir l'équation approximative de cette caractéristique. Prenons le point A comme origine, et la tangente en A comme axe des x ; on peut écrire approximativement, dans le triangle OAB,

$$x = \frac{R}{\cos\varphi}\ (\theta - \theta_0);$$

on a encore

$$y' = \frac{dy}{dx} = u - u_0.$$

L'équation (57) donne :

$$x = \frac{R}{\cos\varphi}\ y'\ \log\frac{C}{y'}.$$

On en déduit :

$$dy = y'\,dx = \frac{y'\,R}{\cos\varphi}\left(\log\frac{C}{y'} - 1\right)dy'.$$

$$y = \frac{y'^2\,R}{2\cos\varphi}\left(\log\frac{C}{y'} - \frac{1}{2}\right).$$

On peut déduire de là un résultat utile. Pour construire une solution en partant d'une caractéristique rectiligne, il faut se donner la constante C ou un élément qui la remplace ; on peut se donner la courbure totale d'un arc AB de la caractéristique de l'autre système.

Pour appliquer l'intégration graphique approchée, nous remplacerons cet arc par les deux tangentes extrêmes ; on peut alors se demander s'il ne convient pas, pour tenir compte de ce que la courbure est nulle au point A, de prendre des tangentes inégales. L'abscisse du point d'intersection des deux tangentes est donnée par la formule

$$X = x - \frac{y}{y'}.$$

On en déduit facilement pour x décroissant indéfiniment :

$$\lim\frac{X}{x} = \frac{1}{2}.$$

Ce résultat s'explique facilement ; la courbure est nulle au point A, mais le contact de la courbe avec sa tangente n'est pas du second ordre ; c'est un contact logarithmique qui se rapproche plus d'un contact du premier ordre que tout autre contact algébrique.

Nous avons considéré le cas d'une caractéristique du premier système et d'une constante positive, nous aurions pu traiter de la même manière les autres cas. Quand la constante est petite en grandeur absolue, on trouve une nappe limitée par une caractéristique rectiligne et un contour apparent qui touche les caractéristiques de même système. Lorsque la constante est plus grande, on trouve que l'angle ε peut changer de signe ; le rayon vecteur qui correspond à la valeur zéro de ε est une caractéristique de système opposé, mais on s'éloigne trop de la caractéristique initiale, pour admettre la formule (57).

140. *Classification des solutions coniques.* — Nous diviserons les solutions coniques en deux classes : les solutions à faibles pressions et les solutions à fortes pressions. Nous justifierons cette classification par le théorème suivant : si en un point d'une solution conique la pression p est plus petite ou plus grande que la pression p' dans la solution linéaire qui admet la valeur de u au point considéré comme valeur constante de u, cette inégalité subsiste dans le même sens dans toute l'étendue de la solution analytique, sauf sur les génératrices d'arrêt où l'inégalité devient une égalité.

En effet, si l'inégalité changeait de sens, il y aurait un point de la solution où l'on aurait

$$p = p' ;$$

prenons les valeurs de θ, u, q en ce point comme valeurs initiales ; nous savons qu'il y a qu'une seule intégrale qui satisfait à ces conditions initiales ; or, la solution linéaire y satisfait certainement puisqu'elle donne la même pression pour les mêmes valeurs de θ et de u ; donc l'égalité précédente existerait dans toute la solution, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ce raisonnement n'est en défaut que si l'on se place sur une carétéristique rectiligne ; par cette caractéristique rectiligne, il passe une infinité de solutions, y compris la solution linéaire ; on a toujours sur cette caractéristique

$$p = p' ;$$

mais comme c'est une génératrice d'arrêt, le changement de sens de l'inégalité ne peut pas se produire.

Nous avons, au numéro 134, divisé les nappes d'une solution conique en deux espèces ; une nappe est de première ou de seconde espèce selon que la première ou la seconde des deux inégalités suivantes est satisfaite :

$$-\sin(u + a - \theta)\sin(u - a - \theta) \gtrless 0.$$

Il résulte de là que les génératrices qui séparent deux nappes d'espèces différentes doivent satisfaire à l'une des deux égalités suivantes :

$$u \pm a - \theta = 0.$$

Les caractéristiques rectilignes satisfont à l'une de ces équations, mais comme ce sont des génératrices d'arrêt, elles ne peuvent séparer deux nappes d'une même solution analytique. Mais les génératrices qui forment contour apparent satisfont aussi à l'une de ces deux équations, car leurs projections enveloppent les caractéristiques de l'un ou l'autre système. On voit donc que si une solution conique se compose de nappes de plusieurs espèces, ces nappes sont séparées par des contours apparents.

Nous avons vu au numéro 134 que selon la classe de la solution et l'espèce de la nappe considérée, les caractéristiques tournaient leur concavité ou leur convexité vers le sommet. Il faut donc qu'entre deux limites successives, contour apparent ou génératrices d'arrêt, les caractéristiques ne présentent pas d'inflexion. On peut démontrer directement qu'il en est ainsi.

On ne pourrait avoir d'inflexion que si l'on avait :

$$\frac{du}{d\theta} = 0,$$

ce qui exige

$$Z = o \quad \text{ou} \quad p = p'.$$

Nous avons démontré plus haut que cette dernière égalité n'existe que sur les génératrices d'arrêt d'une solution non linéaire. Les caractéristiques de l'autre système présentent un point d'arrêt ; il n'y a pas d'inflexion.

Nous avons, au numéro 138, établi une règle pour déterminer si la caractéristique rectiligne limite la solution à droite ou à gauche. Les contours apparents limitent aussi les solutions dans le plan ; on peut les classer en deux systèmes, selon qu'ils touchent les caractéristiques du premier ou du second système. Nous allons démontrer

qu'un contour apparent d'un système limite à droite une solution qui peut être limitée à gauche par une caractéristique de ce système, et vice versa.

Soit (fig. 89) OA un contour apparent du premier système ; r le rayon de courbure au point A de la caractéristique qui touche le contour apparent ; appliquons la formule (52) du numéro 133 :

$$\frac{R}{HF} = \frac{p' - p}{4p \operatorname{tang} \varphi}.$$

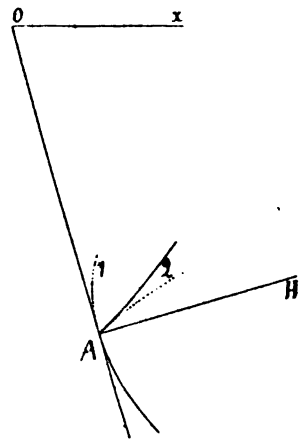

Fig. 89.

Le point H est le centre de courbure de la caractéristique du premier système ; le point F est le centre de courbure de la caractéristique du second système et se confond avec le point de rebroussement ; on a donc

$$HF = + r' \ ;$$

on en déduit

$$\frac{R}{r'} = \frac{p' - p}{4p \operatorname{tang} \varphi},$$

d'où $p < p'$.

Si la solution était à gauche du contour apparent, on aurait au contraire :

$$HF = - r'$$

d'où

$$p > p'.$$

Ainsi un contour apparent du premier système limite à gauche une solution à faibles pressions et limite à droite une solution à fortes pressions, tandis que la caractéristique du premier système limite à droite une solution à faibles pressions et limite à gauche une solution à fortes pressions.

On démontre de la même manière qu'un contour apparent de second système limite à droite une solution à faibles pressions et limite à gauche une solution à fortes pressions.

On peut dès lors se faire une idée de la disposition des nappes d'une solution conique. Supposons une solution à faibles pressions et partons d'une caractéristique rectiligne du premier système. La première nappe sera de première espèce, limitée à droite par la

caractéristique rectiligne de premier système, à gauche par un contour apparent du même système ; puis les nappes seront alternativement de seconde et de première espèce, les contours apparents de second et de premier système. Les nappes de première espèce sont à caractéristiques concaves vers le sommet ; ce sont les seules qui peuvent avoir des génératrices d'arrêt ; le nombre de nappes est donc impair ; la dernière nappe doit avoir une limite à gauche ; cette limite est donc une caractéristique de second système. Une solution conique ne peut donc pas avoir deux caractéristiques rectilignes de même système. La caractéristique de second système présente la forme indiquée (figure 90). Le premier arc AB est concave vers le sommet ; le point A situé sur la caractéristique initiale est un point d'arrêt, le point B est un point de rebroussement situé sur un contour apparent de premier système. Le second arc BC est convexe vers le sommet, il touche en C un contour apparent de second système. Le troisième arc CD présente en D un rebroussement sur un contour apparent de premier système, et ainsi de suite. Le dernier arc EF présente une branche infinie qui est parallèle à l'infini à la caractéristique de second système qui limite la solution. Pour une solution à fortes pressions, on aurait une disposition analogue, mais il faudrait changer les systèmes des caractéristiques et des contours apparents.

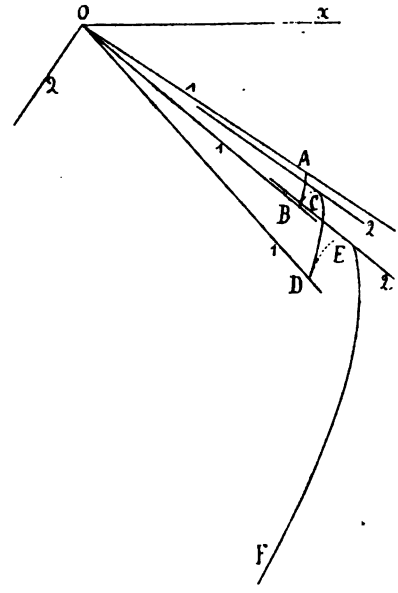

Fig. 90

141. *Représentation par une congruence de courbes.* — Portons les variables q, u, θ en coordonnées ; une solution des équations différentielles sera représentée par une courbe ; l'intégrale générale, qui contient deux constantes arbitraires, sera représentée par une infinité double de courbes. Une caractéristique rectiligne est représentée par un point ; l'ensemble des caractéristiques rectilignes du premier système est représenté par une courbe D, l'ensemble des caractéristiques rectilignes du second système par une courbe D'. Par un point de D, il passe une infinité simple de solutions ; par tous

les points de D, il passe une infinité double de solutions. De même par tous les points de D', il passe une infinité double de solutions. Il n'est pas démontré que ces trois infinités doubles se confondent ; il n'est pas douteux cependant qu'il en est ainsi. Il serait sans exemple que pour un système d'équations différentielles indécomposables, on puisse décomposer l'intégrale générale en deux ou plusieurs intégrales à deux constantes arbitraires.

L'intégrale générale est donc représentée par une congruence de courbes à deux directrices. De plus, il ne parait pas douteux que les points où ces courbes s'appuient sur les directrices sont toujours réels ; car généralement un point devient imaginaire quand il fait partie d'un groupe de deux points qui se confondent avant de donner naissance à deux points imaginaires conjugués ; or, nous avons démontré précédemment qu'une solution ne contient jamais deux caractéristiques de même système, c'est-à-dire que la courbe qui la représente ne peut pas passer par deux points de la courbe D ou deux points de la courbe D'. Ces propositions n'étant pas démontrées, on peut les considérer comme de simples prévisions ; on peut les vérifier en discutant ou en construisant les différentes solutions.

SOLUTIONS A FAIBLES PRESSIONS.

142. *Solutions à une nappe.* — Donnons-nous les valeurs de p et u sur un rayon initial O A (fig. 91) dirigé suivant la verticale. Supposons que OA est la direction de la pression maxima en chacun de ses points et adoptons la pression p qui correspond à la solution linéaire ; les caractéristiques OB et AB forment avec OA l'angle que nous avons désigné par α. Supposons alors que la pression p diminue d'une quantité aussi petite que l'on veut ; nous obtiendrons une nappe de première espèce à faibles pressions ; donc les caractéristiques sont concaves vers le sommet. Les intégrales sont continues par rapport aux valeurs initiales ; nous pouvons donc obtenir un arc AB' qui différera aussi peu que l'on voudra de la droite AB ; il faut cependant se défier du point B, car OB est une caractéristique rectiligne et les intégrales présentent des singularités pour les valeurs qui correspondent à ces caractéristiques. Nous pourrons donc nous approcher du point B, mais nous nous arrêterons d'abord en un point B' sans atteindre le rayon OB.

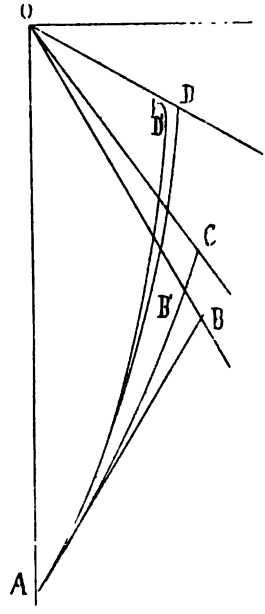

Fig. 91.

Il s'agit alors de prolonger la caractéristique au-delà du point B'. Faisons d'abord l'hypothèse que la courbure reste très petite ; en B' le rayon vecteur fait avec la courbe un angle aigu un peu plus petit que l'angle B qui est égal à $2a$; cet angle que nous désignerons par ε croit quand θ diminue ; on a, en effet,

$$\varepsilon = u + a - \theta,$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = \frac{du}{d\theta} - 1,$$

et nous supposons que la dérivée de u reste très petite. On trouvera donc un rayon OC qui donnera un angle ε égal à $2a$. Ce rayon OC sera une caractéristique du premier système, car il ne peut être un contour apparent puisqu'un contour apparent du premier système ne peut limiter à droite une solution à faibles pressions.

Il reste à exclure l'hypothèse où la courbure, au-delà du point B', prendrait une valeur assez forte pour que ε cesse de croitre. Cette hypothèse est inadmissible, car si on se déplace d'un arc très petit B'C, la pression p varie très peu et dès que l'on donne une courbure sensible à cet arc, la valeur de u diminue et il en résulte une diminution sensible de p' ; cela est impossible, car p' doit être égal ou plus grand que p.

Si nous prenons en A des valeurs décroissantes de p, nous démontrerons comme précédemment que la caractéristique OC va continuer à s'écarter de la verticale ; mais il y a une limite qu'elle ne pourra pas dépasser, c'est le talus naturel OD. Soit AD, la solution limitée à droite par le talus naturel ; diminuons la pression en A d'une quantité aussi petite que l'on veut ; nous obtiendrons une caractéristique AD' différant aussi peu que l'on veut de l'arc AD. En prolongeant l'arc AD' par un arc à faible courbure, on obtiendrait une caractéristique passant au-dessus du talus naturel et qui donnerait une pression négative. C'est une impossibilité, car la pression serait nulle sur un rayon intermédiaire et l'on aurait un talus plan qui commanderait une solution linéaire. Remarquons que la pression p est nulle en D ; en D' les pressions p et p' sont peu différentes, donc très petites ; si on prolonge l'arc AD', la pression p diminue et l'équation (52) indique que la courbure augmente très rapidement et peut même devenir infiniment grande. Il faut donc prolonger l'arc AD' par un arc à très forte courbure qui touchera un de ses rayons vecteurs ; ce rayon sera un contour apparent du second système. En prolongeant la solution, on trouvera une seconde nappe de seconde espèce, à

caractéristiques convexes vers le sommet, puis une troisième nappe qui pourra être limitée à droite par une caractéristique du premier système.

Reprenons les solutions à une nappe, limitées à droite par des caractéristiques du premier système ; la droite OA est un axe de symétrie ; on complétera ces solutions en traçant des caractéristiques symétriques de celles qui sont tracées ; on trouve ainsi des solutions à une seule nappe limitée par deux caractéristiques rectilignes de systèmes opposés. L'angle de ces caractéristiques varie de 2α à 4α.

Nous pouvons alors faire tourner le rayon OA, en supposant toujours que ce rayon donne la direction de la pression maxima en chacun de ses points ; pour chaque position du rayon OA, nous ferons la même discussion.

Il faudra diminuer la pression qui correspond à la solution linéaire jusqu'au moment où l'une des caractéristiques atteindra le talus naturel. Toutes ces solutions peuvent être construites par la méthode indiquée au numéro 135. La détermination des caractéristiques rectilignes se fait avec la plus grande facilité ; si on connait, par exemple, le point B′ sur les deux épures, on se donne la caractéristique OC, on détermine la pression en C en suivant OC et B′C ; on trouve deux pressions qui doivent être égales si OC est bien choisi ; on fait deux essais et l'on trouve l'extrémité de la pression exacte à l'intersection de deux droites ; on obtient en même temps la direction vraie de la caractéristique cherchée.

On peut aussi construire les solutions à une nappe en partant de l'une ou de l'autre des deux caractéristiques rectilignes. On augmente graduellement la courbure du premier arc de la caractéristique qui part d'un point de la caractéristique initiale.

143. *Solutions à trois nappes.* — Donnons-nous encore un rayon vertical OA (fig. 92) et supposons qu'il soit dirigé suivant la pression minima en chacun de ses points. Ce rayon sera la bissectrice de l'angle obtus formé par les caractéristiques menées par un de ses points. Prenons d'abord la solution linéaire ; nous obtiendrons AB comme caractéristique du premier système et OB comme caractéristique du second système ; cette solution est celle qui serait commandée par un terrain horizontal, quand il s'agit de la butée des terres.

Faisons décroitre la pression p au point A ; nous obtiendrons une nappe de seconde espèce à faibles pressions ; les caractéristiques tournent leur convexité vers le sommet. Soit AC la caractéristique de premier système ; on trouvera toujours un rayon OC qui formera avec cette caractéristique un angle aigu égal à 2α ; ce rayon OC ne

sera pas une caractéristique, car les nappes à caractéristiques convexes n'ont pas de caractéristiques rectilignes ; ce rayon sera donc un contour apparent du second système et le point C un point de rebroussement de la caractéristique AC. En continuant la solution, on trouve une nappe de première espèce qui peut être limitée à gauche par une caractéristique du second système. On peut partir de la solution ACD et augmenter la pression en A pour revenir à la solution linéaire ; comme la nappe de première espèce OCD ne peut s'appliquer sur OBA qui est de seconde espèce, il faut admettre que les droites OC et OD convergent toutes deux vers OB. Les épures que l'on peut construire indiquent qu'il faut diminuer fortement la pression en A pour obtenir une nappe de première espèce d'une certaine étendue angulaire. Si on continue à faire décroître la pression, on augmente autant qu'on le veut la courbure de la caractéristique AC ; la droite OC se rapproche de la verticale ; la droite OD s'en rapproche d'abord, la dépasse et finit par atteindre le talus naturel OM ; on a la solution AEM. Toutes les solutions sont symétriques par rapport à *o*A. On voit que la surface conique qui représente les pressions, a d'abord la forme d'un cône ouvert par en haut ; les deux nappes supérieures finissent par se couper et la section du cône prend la forme d'une ligne joignant deux points d'arrêt en formant une boucle au milieu.

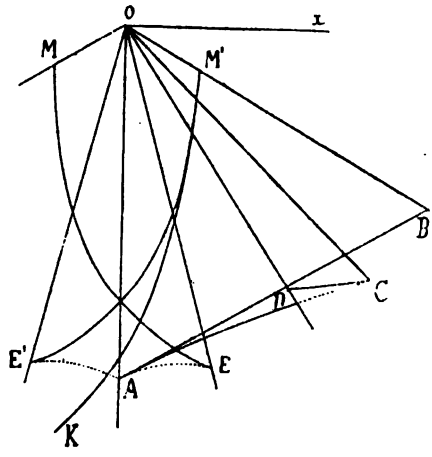

Fig. 92

Nous pouvons encore donner au rayon OA toutes les directions du plan ; partir de la solution linéaire, diminuer la pression et obtenir des solutions à trois nappes de formes très variées. Lorsque les caractéristiques rectilignes forment un angle plus grand que 2α et de sens convenable, on peut construire sur ces caractéristiques une solution à une nappe ; on voit donc qu'il arrive fréquemment que sur deux caractéristiques, on peut construire une solution à une nappe et une solution à trois nappes. Cela se présente notamment pour les deux talus naturels. On peut construire une solution à une nappe dans laquelle la caractéristique du second système est une courbe

M'K qui, à l'infini, est parallèle à OM ; on peut aussi construire une solution à trois nappes, dans laquelle la caractéristique est M'E'A qui prolongée toucherait le rayon OE et deviendrait aussi parallèle à OM à l'infini. Partons de la caractéristique OM' : il doit être possible, en faisant varier la constante, de passer de la solution à trois nappes à la solution à une nappe, et vice versa.

Si l'on part de M'K, on diminuera la constante pour augmenter la courbure ; il semble évident que l'on trouvera d'abord un point de rebroussement très éloigné sur une droite faisant avec OM un angle très petit ; réciproquement, si l'on part de M'E', le point de rebroussement disparaitra en s'échappant à l'infini sur une droite ayant OM pour limite.

D'autre part, une nappe de seconde espèce ne peut s'appliquer sur une nappe de première espèce ; il faut donc qu'en s'approchant de la solution à une nappe, les deux contours apparents, ainsi que la caractéristique rectiligne, aient la même limite OM. Nous avons dit que pour la solution symétrique, la section du cône est une ligne joignant deux points d'arrêt en faisant une boucle au milieu ; pour la solution à une nappe les points d'arrêt sont les mêmes, mais réunis par une courbe sans boucle. Nous passons du premier cas au second en conservant le point d'arrêt de droite ; la boucle s'éloigne vers la gauche et a pour limite le point d'arrêt de gauche ; entre temps, le point d'arrêt de gauche s'est déplacé pour revenir à sa position primitive. Ce raisonnement est d'application plus générale ; il explique comment on peut passer, sans discontinuité, d'une solution donnée à une solution présentant deux nappes de plus ; la caractéristique d'arrêt se déplace jusqu'au moment où elle se confond avec le talus naturel ; elle est alors remplacée par une surface conique dont la section est une boucle infiniment réduite qui s'agrandit en se déplaçant.

144. *Solutions à nappes nombreuses.* — Reprenons la solution AD de la figure 91 ; c'est une solution à une nappe limitée par les deux talus naturels. En diminuant très peu la pression en A, nous obtiendrons deux nappes de plus aux deux extrémités ; nous aurons donc une solution à cinq nappes.

En déplaçant OA, on obtiendra des solutions à cinq nappes présentant des dispositions très variées. Partons de la solution AEM de la figure 92 ; en diminuant très peu la pression en A, nous trouverons une solution à sept nappes, et ainsi de suite. Les tracés graphiques indiquent qu'il suffit de diminuer assez peu la pression initiale pour obtenir des solutions à nappes très nombreuses ; on a une solution

de passage quand l'une des caractéristiques d'arrêt se confond avec un talus naturel ; la ligne d'arrêt exécute des oscillations de plus en plus petites au fur et à mesure que les nappes deviennent nombreuses.

145. *Solution linéaire.* — La solution linéaire est un cas particulier des solutions coniques ; elle sépare les solutions à fortes pressions des solutions à faibles pressions ; on doit donc pouvoir la déduire, au moins comme limite, des solutions que nous venons d'examiner : Soient OA, OB, (fig. 93), les caractéristiques d'une solution linéaire, respectivement du premier et du second système ; elles divisent la solution en trois parties : la partie centrale AOB est une nappe de première espèce ; les deux autres parties sont des nappes de seconde espèce. Dans les solutions coniques, les caractéristiques rectilignes menées par le sommet sont des lignes d'arrêt ; la solution linéaire fait exception ; nous ne pourrons donc pas obtenir la solution linéaire tout entière en partant d'une solution conique ; nous obtiendrons séparément chacune des parties.

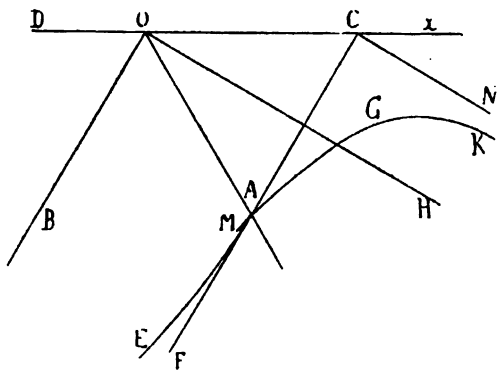

Fig. 93.

Partons de la génératrice OA et donnons à la constante C de l'équation (57) une très grande valeur ; écrivons cette équation sous la forme :

$$\theta - \theta_0 = (u - u_0) \log C - (u - u_0) \log (u - u_0).$$

Si la constante C est suffisamment grande, on obtiendra une valeur très grande de $\theta - \theta_0$ en donnant une valeur très petite à $u - u_0$. Il résulte de là que la caractéristique AE est une courbe à très faible courbure. En faisant croitre C indéfiniment, on obtiendra la droite AF comme limite, c'est-à-dire que la partie AOB de la solution linéaire est la limite d'une solution conique déterminée par la caractéristique OA et une constante infiniment grande. L'équation rappelée plus haut devient alors, en divisant par log C :

$$u - u_0 = 0.$$

Partons de la même caractéristique OA et donnons à la constante

C une valeur positive infiniment petite. Nous obtiendrons à gauche de OA, une nappe de première espèce, limitée à gauche par un contour apparent très voisin de OA. Nous trouverons ensuite une nappe de seconde espèce suivie d'une troisième nappe qui sera de première espèce et pourra être limitée à gauche par une caractéristique du second système. Remarquons que l'on a :

$$\lim (\log C) = -\infty ;$$

on trouvera donc encore la solution linéaire à la limite ; mais il faut examiner ce que deviennent les trois nappes. La première nappe se réduit à zéro, la seconde nappe aura pour limite la solution linéaire, et l'arc MG de la caractéristique du second système aura pour limite la droite AC ; mais la troisième nappe qui est de première espèce ne peut pas avoir pour limite la solution COA qui est de seconde espèce. Pour expliquer ce que devient cette nappe de première espèce, il suffit de rappeler que la solution linéaire est double, il y a la solution qui donne la poussée des terres et la solution qui donne la butée des terres ; les pressions sont représentées par deux plans qui se coupent suivant OC ; par le point C il passe alors deux caractéristiques du second système CA et CN. Or, ces deux solutions sont inséparables ; on obtient l'une ou l'autre, selon le signe que l'on donne à un radical. La solution conique va donc nous donner ces deux solutions ; le cône se résout en deux plans ; la nappe de première espèce a pour limite une partie de la solution linéaire qui donne la butée des terres ; la courbe AGK se résout en deux droites, à l'instar d'une hyperbole qui se réduit en ses deux asymptotes.

Si la caractéristique OA prend la direction du talus naturel, la nappe AOC n'existe plus ; on peut se demander ce que l'on va obtenir en prenant une constante très petite. Nous savons, par la discussion du numéro précédent, qu'en prenant une constante très petite, nous trouverons des solutions à nappes de plus en plus nombreuses ; une pareille solution n'a pas de limite ; aussi la solution que l'on obtient par cette limite disparait.

SOLUTIONS A FORTES PRESSIONS.

146. *Solution à une nappe.* — Partons de la solution linéaire (fig. 94) où la verticale OA est la direction des pressions minima ; soient AB, OB les caractéristiques du premier et du second système. Augmentons la pression en A suffisamment peu ; nous obtiendrons une nappe de seconde espèce à fortes pressions ; les

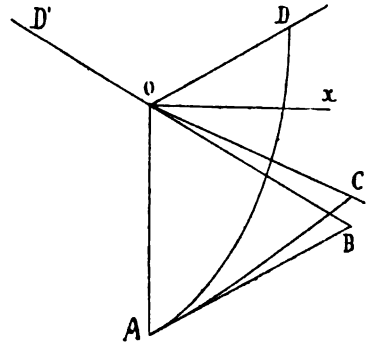

Fig. 94.

caractéristiques sont concaves vers le sommet ; on obtiendra une caractéristique AC différant d'une droite aussi peu que l'on voudra ; on trouvera un rayon OC qui forme avec la caractéristique un angle aigu égal à $2a$; c'est une caractéristique du second système, car un contour apparent du second système ne peut limiter à droite une solution à fortes pressions. On obtient donc une solution à une nappe limitée par deux caractéristiques de systèmes différents et disposées symétriquement par rapport à la verticale. En augmentant graduellement la pression en A, on trouve des solutions du même genre ; les caractéristiques se rapprochent des talus naturels OD et OD' ; on finit par obtenir une solution limitée par ces deux talus naturels. En faisant tourner OA, on trouve des solutions à une nappe non symétriques.

147. *Solutions à trois nappes.* — Partons de la solution linéaire (fig. 95) où la verticale OA est la direction des pressions maxima ; soient OB et AB les caractéristiques du premier et du second système.

Faisons croitre la pression en A, nous obtiendrons une nappe de première espèce à fortes pressions ; donc les caractéristiques tournent leur convexité vers le sommet ; on trouvera comme limite à droite un contour apparent OC du premier système, puis une nappe COD de seconde espèce. En faisant croitre la pression, la caractéristique OD du premier système se rapproche de la verticale, la dépasse et atteint le talus naturel OM. On obtient ainsi des solutions symétriques à trois nappes. En faisant tourner OA, on obtient des solutions non symétriques à trois nappes qui présentent les dispositions les plus variées.

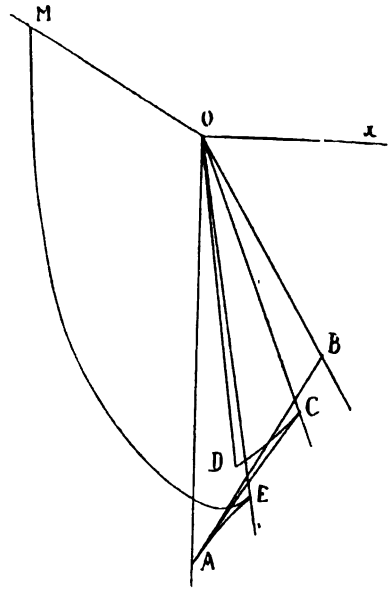

Fig. 95.

148. *Solutions à nappes nombreuses.* — Reprenons la solution à une nappe limitée par les deux talus naturels ; c'est la solution AD de la figure 94. En augmentant suffisamment peu la pression en A, il se formera deux nouvelles nappes à chacune des extrémités, nous obtiendrons une solution à 5 nappes.

Reprenons ensuite la solution à trois nappes limitée par les deux talus naturels ; c'est la solution AEM de la figure 95 ; en augmentant suffisamment peu la pression en A, on trouvera une solution à 7 nappes, et ainsi de suite. En faisant tourner le rayon initial, on obtiendra des solutions non symétriques à nappes nombreuses.

Toute cette discussion est fort semblable à la discussion des solutions à faibles pressions. Il y a cependant une différence sensible dans la disposition des nappes ; nous allons voir que si les pressions sont suffisamment grandes, la caractéristique peut tourner autour du sommet comme une spirale, avant de toucher le premier contour apparent.

149. *Pressions très grandes.* Nous supposerons les pressions tellement grandes, que l'on puisse, dans les équations différentielles, négliger les termes qui contiennent le poids spécifique ; nous aurons alors :

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{Z}{X} = \frac{\cos^2\varphi}{4\sin\varphi\sin(u+a-\theta)\sin(u-a-\theta)},$$

$$\frac{dq}{du} = \frac{Y}{Z} = -\frac{2q\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\sin(2u-2\theta).$$

Eliminons la variable θ, en posant

$$u-\theta = v;$$

nous obtenons

$$\frac{du}{du-dv} = \frac{\cos^2\varphi}{2\sin\varphi(\sin\varphi-\cos 2v)},$$

$$\frac{dq}{du} = -\frac{2q\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\sin 2v.$$

Posons :

$$\alpha^2 = \frac{1+3\sin\varphi}{1+\sin\varphi},$$

$$\beta^2 = \frac{3\sin\varphi-1}{1-\sin\varphi},$$

$$\alpha^2+\beta^2 = \frac{4\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Les équations différentielles deviennent, après quelques calculs :

$$du = \frac{d \operatorname{tang} v}{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{tang}^2 v},$$

$$\frac{2\,dq}{q} = \frac{d\,(\alpha^2 \cos^2 v - \beta^2 \sin^2 v)}{\alpha^2 \cos^2 v - \beta^2 \sin^2 v},$$

qui ont pour intégrale générale

$$2\,\alpha\beta\,u = \log C \frac{\alpha + \beta \operatorname{tang} v}{\alpha - \beta \operatorname{tang} v},$$

$$q^2 = C'\,(\alpha^2 \cos^2 v - \beta^2 \sin^2 v).$$

Lorsque la constante C est négative, on peut faire v égal à un quadrant ; on trouve :

$$2\,\alpha\,\beta\,u_0 = \log\,(-C),$$

$$q_0^2 = -\beta^2 C'.$$

Eliminons les constantes en introduisant ces valeurs dans l'intégrale générale ; on obtient

$$2\,\alpha\,\beta\,(u - u_0) = \log \frac{\alpha + \beta \operatorname{tang} v}{\beta \operatorname{tang} v - \alpha},$$

$$q^2 = q_0^2 \left(\sin^2 v - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cos^2 v\right).$$

Prenons comme rayon initial, le rayon qui correspond aux valeurs

$$v = \frac{\pi}{2}, \quad u = u_0, \quad q = q_0 ;$$

nous ferons varier u de u_0 à l'infini, en faisant décroître v

$$\text{de } \frac{\pi}{2} \text{ à } v' = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{\beta};$$

on reconnait facilement que cette dernière valeur de v est plus

grande que a ; il n'y a donc pas de contour apparent et θ varie de θ_0 à l'infini. Les caractéristiques ont la forme de spirales ; la caractéristique du premier système coupe les rayons vecteurs sous un angle qui varie

$$\text{de } \frac{\pi}{2} - a \text{ à } v' - a ;$$

la caractéristique du second système forme avec les rayons vecteurs un angle qui varie

$$\text{de } \frac{\pi}{2} + a \text{ à } v' + a ;$$

les rayons vecteurs de cette dernière caractéristique passent par un minimum pour

$$v + a = \frac{\pi}{2}.$$

Le rayon initial est un axe de symétrie. En partant de ce rayon, la pression décroit de q_0 à zéro. La surface conique qui représente les pressions dans le plan est engendrée par une droite dont la projection sur le plan effectue une infinité de révolutions autour du sommet et dans les deux sens à partir d'un axe de symétrie ; la génératrice fait avec le plan un angle qui décroit indéfiniment en partant de la génératrice située dans le plan de symétrie.

Lorsque la constante C est positive, on peut faire v égal à zéro ; on trouve :

$$2\,\alpha\beta u_0 = \log C$$

$$q_0^2 = \alpha^2 C'.$$

Eliminons les constantes en introduisant ces valeurs dans l'intégrale générale ; on obtient :

$$2\,\alpha\beta\,(u - u_0) = \log \frac{\alpha + \beta \operatorname{tang} v}{\alpha - \beta \operatorname{tang} v},$$

$$q^2 = q_0^2 \left(\operatorname{Cos}^2 v - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin^2 v\right).$$

Prenons, comme rayon initial, le rayon qui correspond aux valeurs

$$v = 0, \quad u = u_0, \quad q = q_0 ;$$

nous ferons varier u de u_0 à l'infini, en faisant croitre v de zéro à v' ; il y aura un contour apparent pour

$$v = a.$$

Nous savons déjà que nous avons d'abord une nappe de première espèce, que les projections des caractéristiques sont convexes vers le sommet ; on vérifierait facilement que θ décroit jusqu'au contour apparent. La caractéristique du second système présente alors un rebroussement et devient concave vers le sommet ; la caractéristique du premier système touche le contour apparent et devient aussi concave vers le sommet.

Les angles formés par les caractéristiques et les rayons vecteurs tendent alors vers les limites

$$v' \pm a$$

comme dans le premier cas. On reconnait facilement que la pression q decroit à partir du rayon initial qui est un axe de symétrie.

En résumé, on peut trouver une solution à une nappe de seconde espèce d'une étendue angulaire infinie ou bien une solution à trois nappes dont une est de première espèce tandis que les deux autres sont de seconde espèce et d'une étendue angulaire infinie. Ces solutions seraient exactes si les terres n'étaient pas pesantes ; elles ne sont qu'approchées lorsque la terre est pesante et que les pressions sont très grandes. Nous avons vu que la pression décroit jusqu'à zéro, il arrivera donc un moment où ces solutions cesseront d'être approchées ; on se trouvera alors dans les conditions ordinaires et la solution se terminera par une succession de nappes et une caractéristique.

Nous avons posé

$$\beta^2 = \frac{3 \sin \varphi - 1}{1 - \sin \varphi} ;$$

nous avons donc supposé

$$\sin \varphi > \frac{1}{3}$$

en excluant les cas où le coefficient de frottement est très petit. Dans ce cas, on doit poser

$$\beta^2 = \frac{1 - 3\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} ;$$

on trouve les intégrales

$$\text{tang } v = \frac{\alpha}{\beta} \text{ tang } \alpha\beta\,(u - u_0),$$

$$q^2 = q_0^2 \left(\cos^2 v + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin^2 v\right).$$

En faisant croitre u de u_0 à l'infini, v croit de zéro à l'infini et l'on trouve une infinité de nappes séparées par des contours apparents que l'on obtient en posant

$$\text{tang } v = \pm \text{ tang } a.$$

Prenons comme rayon initial le rayon qui correspond aux valeurs

$$u = u_0, \quad v = 0, \quad q = q_0 ;$$

c'est un axe de symétrie.

Nous savons déjà que nous trouverons à droite de cet axe une demi nappe de première espèce ; on peut le reconnaitre en discutant la valeur de θ. Cette nappe est limitée à droite par un contour apparent du premier système que l'on obtient en posant :

$$\text{tang } v = a.$$

En faisant croitre v jusqu'à un quadrant, on trouvera une demi nappe de seconde espèce ; le rayon qui correspond à la valeur d'un quadrant est évidemment un axe de symétrie. Soit θ l'angle qui détermine ce second axe de symétrie ; on a :

$$\alpha\beta\,(u_1 - u_0) = \frac{\pi}{2}, \quad v_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_1 = u_1 - v_1, \quad \theta_0 = u_0, \quad \theta_1 - \theta_0 = u_1 - u_0 - v_1$$

$$\theta_1 - \theta_0 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha\beta} - 1\right)$$

Or,

$$\alpha\,\beta = \sqrt{\frac{1 - 9\,\sin^2\varphi}{1 - \sin^2\varphi}} < 1,$$

donc,

$$\theta_1 - \theta_0 > 0.$$

Il résulte de là que la nappe de seconde espèce a une étendue angulaire plus grande que la nappe de première espèce. Des nappes identiques vont se produire successivement dans les deux sens.

Il y a ensuite à considérer le cas intermédiaire où l'on a :

$$\sin\varphi = \frac{1}{3} ;$$

On trouve

$$\text{tang}\, v = \alpha^2\,(u - u_0),$$

$$q^2 = q_0^2 \cos^2 v.$$

On trouve une solution à 3 nappes ; l'une est de seconde espèce et limitée par les contours apparents qui correspondent à

$$\text{tang}\, v = \pm\, a ;$$

les deux autres sont de seconde espèce et leurs étendues angulaires sont infinies.

Ce cas intermédiaire est à la fois la limite du premier et du second cas. Dans le premier cas, la solution à deux nappes disparait et la solution à trois nappes se transforme en faisant converger φ vers la valeur de passage. Dans le second cas, on trouve

$$\lim\,(\theta_1 - \theta_0) = \infty$$

en partant d'une nappe de première espèce, on trouve deux nappes de seconde espèce illimitée. Si on exclut les valeurs très petites de φ, on trouve que l'étendue angulaire des nappes de seconde espèce est toujours très grande ; la pression sur l'axe de symétrie d'une de ces nappes est donnée par la formule

$$q^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}\, q_0^2 ;$$

elle est beaucoup plus petite que q_0 ; on revient donc aux pressions ordinaires et l'influence du poids des terres se fait sentir. Il serait assez long d'examiner complètement toutes les dispositions qui peuvent se présenter.

150. *Solution linéaire.* La solution linéaire peut s'obtenir comme limite des solutions à fortes pressions ; il suffit de reprendre les raisonnements du numéro 145, mais en donnant, à la constante de l'équation (57), une valeur négative infiniment grande et une valeur négative infiniment petite. La constante infiniment grande donne une solution à trois nappes ; la première, qui est de seconde espèce, a pour limite la nappe AOC (fig. 93) ; la seconde a pour limite la nappe COH ; la troisième disparait. La constante infiniment petite donne une solution à trois nappes ; les deux extrêmes disparaissent ; la nappe intermédiaire, qui est de première espèce, a pour limite la nappe AOB de la solution linéaire.

Applications.

151. *Profil polygonal.* — Nous avons vu (124) que, si le profil des terres comprend un angle rectiligne, les côtés commandent deux solutions linéaires que l'on doit réunir par une solution conique déterminée par deux caractéristiques de systèmes opposés. Lorsque les caractéristiques forment un angle plus grand que l'angle formé par les caractéristiques en un point non singulier, on trouve une solution à une nappe. Cela se présente, dans la poussée des terres, lorsque l'angle est convexe vers le haut ; c'est le cas de la figure 76 du numéro 124, on obtient une nappe de première espèce à faibles pressions (142). Cela se présente aussi, dans la butée des terres, quand l'angle est concave vers le haut ; l'épure circulaire indique immédiatement que les caractéristiques rectilignes forment un angle plus grand que le supplément de $2a$; on obtient une nappe de seconde espèce à forte pression (146).

Dans la figure 81 du numéro 126, nous avons supposé un angle concave vers le haut et cherché l'état d'équilibre qui correspond à la poussée des terres. On est amené à construire une solution conique sur deux caractéristiques formant un angle plus petit que l'angle ordinaire ; il n'existe pas de solution à une nappe, car les caractéristiques seraient convexes vers le sommet, et dans ce cas, il n'y a pas de caractéristique rectiligne (138). On peut construire une solution à forte pression à trois nappes (147), comprenant deux petites nappes de seconde espèce qui envahissent les solutions linéaires et une nappe de première espèce. Cette solution est physiquement impos-

sible, mais elle fait prévoir la véritable solution qui est une nappe de première espèce, séparée des solutions linéaires par des discontinuités finies. On peut construire sur les deux caractéristiques une solution à trois nappes à faibles pressions (143), mais elle ne conduit à rien.

Dans la butée des terres, c'est le cas de l'angle convexe vers le haut qui donne deux caractéristiques rectilignes faisant un angle plus petit que l'angle ordinaire. On trouve une solution à faibles pressions, à trois nappes (143) ; les nappes extrêmes, qui sont de première espèce, envahissent les solutions linéaires.

Cette solution est physiquement impossible, mais elle fait prévoir la solution vraie qui est une nappe de seconde espèce à faibles pressions séparées des solutions linéaires par deux lignes de discontinuité finie.

152. *Murs de soutènement.* — Dans la butée comme dans la poussée des terres, on doit construire une nappe comprise entre le mur et une caractéristique ; c'est une nappe de solution conique si le profil du mur et la caractéristique sont rectilignes. Le mur forme généralement contour apparent ; la nappe est possible si le mur ne dépasse pas la caractéristique. En prolongeant cette nappe, on trouvera presque toujours une solution à trois nappes ; pour obtenir une solution à nappes nombreuses, il faut que le mur et la caractéristique forment avec le talus naturel des angles très petits, ce qui est exceptionnel. Si on suppose un mur indéfiniment poli ou à faible coefficient de frottement, il peut être impossible de construire une nappe satisfaisant aux conditions du mur et de la caractéristique. Soit (fig. 96) un mur indéfiniment poli AB présentant un fruit vers les terres ; on doit construire une nappe sur la caractéristique AC et admettant AB comme facette principale à pression minima ; cette nappe est impossible, car si elle existait, on obtiendrait une caractéristique convexe vers le sommet, et une nappe de cette nature ne peut avoir de caractéristique. La caractéristique du second système est concave en partant de la caractéristique AC ; on trouvera une caractéristique de la forme CEB présentant un rebroussement en E ; elle appartient à une solution à fortes pressions

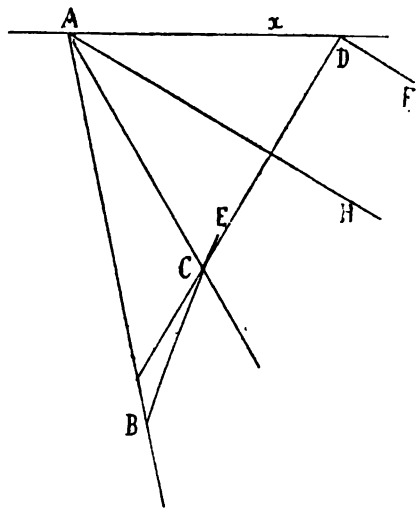

Fig. 96.

et généralement à trois nappes ; elle comprend une nappe de seconde espèce ACE, une nappe de première espèce dont une partie seulement est conservée. On peut démontrer qu'il est toujours possible de satisfaire à la condition du mur, car en faisant varier la constante qui détermine la solution construite sur AC comme caractéristique, on doit obtenir les deux solutions linéaires situées au-dessus et en dessous de AC. En prenant une constante infiniment petite, on trouvera une caractéristique qui aura pour limite le prolongement de DC et fait un angle trop grand avec le mur. En augmentant indéfiniment la valeur absolue de la constante, la caractéristique aura pour limite la caractéristique brisée CDF appartenant aux deux solutions linéaires déterminées par le plan libre AD. Le contour apparent du second système peut donc se relever jusqu'à la droite AH, parallèle à DF, et passera par la position AB. Dans ce dernier cas, la caractéristique fait un angle nul avec le mur. Entre les deux solutions qui fournissent un angle trop grand et un angle nul, il existe une solution qui donne un angle juste.

153. *Solution pseudo-conique.* — Nous supposons que le profil du terrain comprend deux courbes formant un angle curviligne. Le sommet de cet angle sera un point singulier analogue au sommet d'une solution conique. Les deux courbes commandent deux solutions régulières ; on doit les réunir par une solution déterminée par deux caractéristiques curvilignes de systèmes différents ; ces dernières forment un angle plus petit ou plus grand que l'angle formé par les caractéristiques en un point non singulier. Au sommet de cet angle, la fonction u prend une infinité de valeurs comprises entre deux limites. Considérons un fragment infiniment petit du massif autour du point singulier ; adoptons un rapport de similitude infiniment grand et passons à la limite ; nous obtiendrons, comme limite relative, une solution conique dans laquelle les courbes passant par le point singulier sont remplacées par leurs tangentes ; les caractéristiques rectilignes de cette solution conique sont les tangentes aux caractéristiques curvilignes de la solution primitive. On obtient ainsi approximativement les formes des caractéristiques à grande courbure dans les environs du point singulier ; on peut reconnaître l'existence de contours apparents ou de discontinuités finies. On peut aussi étudier de cette manière la forme approximative des caractéristiques dans les environs du point d'intersection d'un mur curviligne et d'un terrain curviligne.

(A continuer.)

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

J. MASSAU

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

CHAPITRE IV *(Suite)* (1).

§ 7. CARACTÉRISTIQUES RECTILIGNES, SOLUTIONS CONOÏDES ET PSEUDO-CONOÏDES.

154. *Théorèmes de M. Maurice Lévy.* — Dans le mémoire déjà cité, M. Maurice Lévy a démontré deux théorèmes importants sur les plans de glissement. Nous démontrerons ces théorèmes en utilisant les équations des caractéristiques.

Théorème I. — Les lignes de glissement ne forment un système de lignes parallèles que dans la solution linéaire.

En effet, si les caractéristiques d'un système sont des droites parallèles, les caractéristiques de l'autre système, qui doivent couper ces droites parallèles sous un angle constant, forment aussi un système de droites parallèles. Soit p_0 la pression en un point A, (fig. 97), sur les faces de glissement ; prenons pour nouveaux axes

(1) Extrait du tome II de la troisième série des *Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Gand*, 1903.

coordonnés les lignes de glissement A x', A y' qui passent par ce point ; nous calculerons la pression p en un point quelconque B du plan ayant pour coordonnées

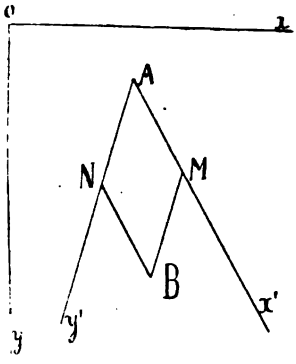

Fig. 97.

$$x' = \text{AM}, \quad y' = \text{MB},$$

en appliquant aux caractéristiques AM et BM les équations (20) et (22) du numéro 109 ; elles deviennent :

$$dp = -\Pi\, ds \cos(u + a),$$

$$\partial p = \Pi\, \partial\sigma \cos(u - a).$$

On trouve, en appelant p_1 la pression au point M,

$$p_1 = p_0 - \Pi\, x' \cos(u + a),$$

$$p = p_1 + \Pi\, y' \cos(u - a);$$

d'où, en éliminant p_1,

$$p = p_0 - \Pi\, x' \cos(u + a) + \Pi\, y' \cos(u - a).$$

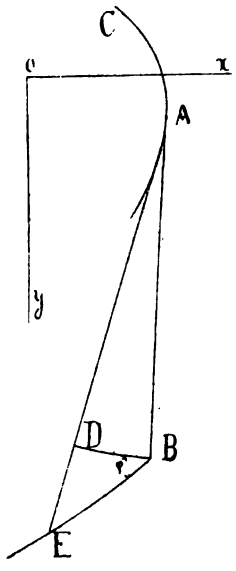

Fig. 98.

On voit que p est une fonction linéaire des coordonnées du point ; en égalant la pression à zéro, on trouve l'équation d'une droite, c'est le talus rectiligne indéfini qui limite le massif.

Théorème II. — Les caractéristiques d'un système ne peuvent former un système de droites non parallèles.

Supposons, pour fixer les idées, que les caractéristiques du premier système forment un système de droites enveloppant la courbe CA (fig. 98). Nous prendrons, comme coordonnées d'un point quelconque B du plan, la distance tangentielle

$$r = \text{AB}$$

et l'angle u que fait la pression maxima avec l'axe ox ; cet angle détermine la direction de la caractéristique AB qui fait l'angle $u - a$ avec l'axe ox et par consé-

quent la droite AB elle-même. Soit p_0 la pression au point A ; la pression en B est donnée par la formule

$$p = p_0 - \Pi r \cos(u + a).$$

Il s'agit de voir si les équations de la seconde caractéristique sont satisfaites.

On satisfait à la première de ces équations :

$$\partial y = \operatorname{tang}(u + a)\,\partial x$$

en traçant les caractéristiques du second système de manière qu'elles coupent celles du premier système sous un angle constant $2a$. Il reste donc à vérifier la seconde équation qui est

$$\partial p = -2p \operatorname{tang} \varphi . \partial u + \Pi\, \partial\sigma \cos(u - a).$$

Nous devons remplacer p par la valeur écrite plus haut ; nous devons aussi remplacer ∂r et $\partial\sigma$ par leurs valeurs que nous obtiendrons dans la limite relative du triangle BDE où BD est l'arc de la développante de la courbe CA. On a d'abord

$$\partial\sigma = \lim r \mathrm{BE} = \frac{r\,\partial u}{\cos\varphi}.$$

Nous calculerons ∂r en remarquant que

$$\partial(\mathrm{CA} + r) = \lim r \mathrm{DE} = r \operatorname{tang}\varphi . \partial u.$$

Si R désigne le rayon de courbure en A de la courbe CA, on a

$$\partial \mathrm{CA} = \mathrm{R}\,\partial u ;$$

on a donc

$$\partial r = r \operatorname{tang}\varphi . \partial u - \mathrm{R}\,\partial u.$$

L'équation des caractéristiques du second système devient en remplaçant p, ∂r et $\partial\sigma$ par leurs valeurs et en opérant quelques simplifications :

$$\partial p_0 + 2 p_0 \operatorname{tang}\varphi\, \partial u = 4\,\Pi \cos(u + a) \operatorname{tang}\varphi . r\,\partial u - \Pi\,\mathrm{R}\cos(u + a)\,\partial u.$$

Cette équation doit être satisfaite quel que soit r ; on doit donc avoir

$$4\ \Pi \cos (u + a) \operatorname{tang} \varphi = 0.$$

Cette équation doit être satisfaite quel que soit u ; on doit donc avoir

$$\Pi = 0.$$

Cette équation ne peut pas être satisfaite, parce que nous supposons les terres pesantes ; l'hypothèse de droites de glissement non parallèles est donc réduite à l'absurde.

155. *Solution conoïde.* — Supposons les terres non pesantes ; l'équation des caractéristiques du second système se réduit à

$$\delta p_0 = -2 p_0 \operatorname{tang} \varphi\ \delta u\ ;$$

on satisfait à cette équation en prenant

$$p_0 = C\, e^{-2u \operatorname{tang} \varphi}.$$

Les équations des deux caractéristiques étant satisfaites, les équations aux dérivées partielles le sont aussi (32, 3°). Il suffit donc, pour obtenir une solution où les caractéristiques du premier système sont les tangentes à la courbe CA, de calculer la pression p_0 le long de cette courbe par la formule précédente. On obtiendra la pression p en un point quelconque B du plan, en suivant la caractéristique AB ; on a :

$$dp = 0$$

$$p = p_0 - C\, e^{-2u \operatorname{tang} \varphi}.$$

Si on représente les fonctions p et u en les portant en ordonnées suivant une perpendiculaire au plan, on obtient deux surfaces réglées ; les caractéristiques rectilignes sont les projections de génératrices rectilignes parallèles au plan.

La courbe CA peut être choisie arbitrairement ; supposons qu'elle se réduit à un seul point. En projection sur le plan, les caractéristiques forment un faisceau de droites passant par ce point ; les caractéristiques du second système coupent ces droites sous un angle constant ; ce sont donc des spirales logarithmiques. Dans l'espace, les fonctions p et u sont représentées par des surfaces conoïdes ; le foyer

des caractéristiques du premier système est la projection des directrices rectilignes de ces surfaces réglées ; ces directrices forment une caractéristique du second système, car en s'approchant du foyer, les arcs de spirales logarithmiques ont pour limites le foyer lui-même. Les deux équations des caractéristiques du second système sont du reste satisfaites par ces directrices ; la première est satisfaite, car on a :

$$\partial y = 0 , \quad \partial x = 0 ;$$

la deuxième équation se réduit à

$$\partial p = -2p \operatorname{tang} \varphi \, \partial u ;$$

il suffit d'associer les points des directrices de manière à satisfaire à l'intégrale de cette équation qui est :

$$p = C e^{-2u \operatorname{tang} \varphi} \tag{59}$$

On pourrait évidemment construire des solutions conoïdes où le foyer appartiendrait aux caractéristiques du premier système et où les caractéristiques rectilignes seraient les caractéristiques du second système. Il suffit de regarder la figure de l'autre côté du plan pour que les caractéristiques passent d'un système à l'autre.

156. *Cas général où la pesanteur est nulle.* — Nous rencontrerons le cas le plus général, dans lequel la pesanteur est nulle, en nous donnant arbitrairement deux caractéristiques AC et AB (fig. 99) de systèmes opposés. Nous allons démontrer que les caractéristiques forment deux familles de courbes telles que les arcs d'un système compris entre deux courbes de l'autre système ont même courbure totale.

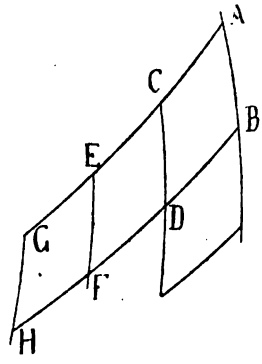

Fig. 99.

Soit ABDC un quadrangle formé par deux caractéristiques du premier système et deux caractéristiques du second système. Soient : $p_0 u_0$, $p_1 u_1$, $p_2 u_2$, $p u$, les valeurs des fonctions p, u aux points A, B, C, D. Nous pouvons calculer la pression p en suivant le contour ABD ou le contour ACD ; nous devons obtenir le même résultat. On trouve, en suivant AB qui est une caractéristique du premier système :

$$dp = 2 p \operatorname{tang} \varphi \, du,$$

$$\log p_1 - \log p_0 = 2 (u_1 - u_0) \operatorname{tang} \varphi ;$$

en suivant BD qui est une caractéristique du second système, on a :

$$\partial p = -2p \operatorname{tang} \varphi \, \partial u,$$

$$\log p - \log p_1 = -2 (u - u_1) \operatorname{tang} \varphi.$$

On en déduit

$$\frac{\log p - \log p_0}{2 \operatorname{tang} \varphi} = (u_1 - u_0) - (u - u_1).$$

En suivant le contour A C D, on trouve de la même manière :

$$\frac{\log p - \log p_0}{2 \operatorname{tang} \varphi} = -(u_2 - u_0) + (u - u_2).$$

En soustrayant ces deux équations membre à membre, on obtient

$$2 (u_1 - u_0) - 2 (u - u_2) = 0$$

d'où l'on tire

$$u_1 - u_0 = u - u_2,$$

$$u_2 - u_0 = u - u_1.$$

La première équation démontre que les arcs AB et CD ont même courbure totale ; la seconde démontre que les arcs AC et BD ont aussi même courbure totale. On démontre de la même manière que les arcs AB, CD, EF, GH, etc., compris entre deux caractéristiques de systèmes opposés, ont tous même courbure totale ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Cette propriété permet de construire approximativement les caractéristiques. On donne les arcs AB et AC ; on connait donc les courbures totales des arcs inconnus CD et DB ; on en déduit les directions des tangentes aux caractéristiques au point D ; on peut alors tracer approximativement les arcs CD et BD en les remplaçant par deux tangentes égales. Les caractéristiques étant tracées, on calcule facilement la pression en un point quelconque si on connait la pression au point A ; il suffit de passer du point A au point quelconque en suivant deux caractéristiques de système opposé, comme nous l'avons fait précédemment en passant du point A au point D. On peut construire l'épure des pressions ; les courbes qui correspondent aux caractéristiques sont des spirales logarithmiques.

L'épure devient plus facile à construire, si l'on choisit sur les caractéristiques données des arcs de même courbure totale ; on obtient de suite les directions des tangentes aux caractéristiques.

Le cas dont nous venons de nous occuper a été étudié analytiquement par M. Boussinesq (1) qui est parvenu à intégrer les équations du problème, en y appliquant la transformation de Legendre. Nous arriverons au même but en transformant les équations des caractéristiques. Les équations des caractéristiques du premier système sont :

$$dp = -2p\,du \operatorname{tang}\varphi,$$
$$dy = -\operatorname{tang}(u-a)\,dx ;$$

celles des caractéristiques du second système sont :

$$\partial p = -2p\,\partial u \operatorname{tang}\varphi,$$
$$\partial y = \operatorname{tang}(u+a)\,\partial x.$$

Nous prendrons comme nouvelles variables indépendantes :

$$u \text{ et } v = \frac{\log p}{2 \operatorname{tang}\varphi} ;$$

les premières équations des caractéristiques deviennent :

$$dv = du,$$
$$\partial v = -\partial u.$$

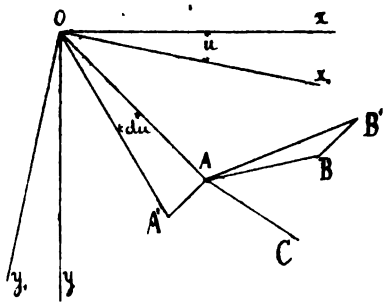

Fig. 100.

M. Boussinesq a pris comme fonctions inconnues les coordonnées x_1, y_1 d'un point quelconque du plan par rapport aux axes x, oy_1 (fig. 100) déterminés par la condition

$$xox_1 = u.$$

Il est facile d'exprimer les anciennes coordonnées x et y au moyen des nouvelles variables x_1 et y_1 ; on trouve les nouvelles équations des caractéristiques après quelques calculs. Nous arriverons immédiatement à ces équations de la manière suivante. L'élément A B de la première caractéristique, déterminé par ses projections dy et dx, se compose de l'élément A B' déterminé par les projections dy_1 et

(1) Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome XXVIII, p. 757.

dx_1 et du déplacement A A' dû à la rotation du des axes $x_1 y_1$; cet élément A B fait un angle $-a$ avec l'axe ox_1 ; on a donc :

$$\frac{dy_1 + x_1\,du}{dx_1 - y_1\,du} = -\operatorname{tang} a.$$

En exprimant que l'élément de la seconde caractéristique fait l'angle $+a$ avec ox_1, on trouve de la même manière :

$$\frac{\partial y_1 + x_1\,\partial u}{\partial x_1 - y_1\,\delta u} = \operatorname{tang} a.$$

En exprimant les différentielles au moyen des dérivées partielles et en tenant compte des équations différentielles en u et v, on trouve les deux équations :

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} + \frac{\partial y_1}{\partial v} + \operatorname{tang} a\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial v}\right) = y_1 \operatorname{tang} a - x_1,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} - \frac{\partial y_1}{\partial v} - \operatorname{tang} a\left(\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial x_1}{\partial v}\right) = -y_1 \operatorname{tang} a - x_1.$$

En ajoutant, puis en soustrayant ces équations, on obtient :

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} + \operatorname{tang} a\,\frac{\partial x_1}{\partial v} = -x_1,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} + \operatorname{tang} a\,\frac{\partial x_1}{\partial u} = y_1 \operatorname{tang} a.$$

Ces équations sont linéaires à coefficients constants ; on peut exprimer les fonctions inconnues par des intégrales définies.

157. *Solution pseudo-conoïde.* — Abandonnons le cas théorique où la pesanteur est nulle ; nous allons montrer que, sans faire cette hypothèse, on peut construire une solution ayant beaucoup d'analogie avec la solution conoïde. On sait que l'on détermine une solution par deux caractéristiques de systèmes opposés ; donnons-nous une caractéristique ordinaire BM (fig. 101) que nous supposerons du premier système pour fixer les idées ; donnons-nous ensuite une caractéristique BK du second système et choisissons pour cette dernière une courbe forte courbure, à de telle sorte que la fonction u varie d'une manière appré-

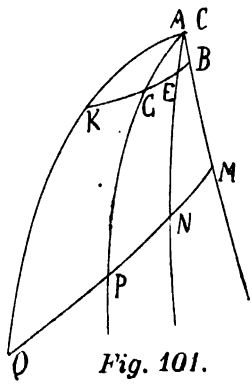

Fig. 101.

ciable sur une longueur très petite de la courbe. Les caractéristiques du premier système forment avec la caractéristique BK des angles égaux à 2α ; on obtiendra donc des courbes EN, GP, KQ, qui divergeront en s'éloignant de BK. Les pressions sur l'arc BK doivent satisfaire à l'équation

$$\partial p = -2p \operatorname{tang} \varphi \, \partial u + \Pi \, \partial y,.$$

Si la courbure de BK est assez grande, nous pourrons négliger le dernier terme de cette équation et écrire :

$$\partial p = -2p \operatorname{tang} \varphi \, \partial u,$$

$$p = p_0 \, e^{-2(u-u_0) \operatorname{tang} \varphi}.$$

Faisons décroitre indéfiniment la longueur de l'arc BK en lui conservant une courbure totale finie ; la caractéristique se réduira en un point et la formule précédente sera rigoureusement exacte. Soit A ce point limite de BK ; ce point est un foyer des caractéristiques du premier système ; il est la projection d'une caractéristique que l'on forme en associant les valeurs de p et de u qui satisfont à l'équation précédente ; à chaque système de valeurs correspond une caractéristique du premier système qui émerge du point A. Si, dans les environs du point A, on néglige l'influence du poids des terres et si on remplace AB par sa tangente en A, on retrouve la solution conoïde ; dans la solution qui nous occupe, les droites sont remplacées par des lignes courbes. Si l'on porte les fonctions p et u en ordonnées perpendiculaires au plan, la caractéristique A est représentée par deux droites, projetées en A, qui font partie des surfaces qui représentent les fonctions p et u. Les caractéristiques du premier système rencontrent ces droites qui jouent le rôle de directrices ; c'est ce qui explique le nom de solution pseudo-conoïde.

On peut construire la solution pseudo-conoïde par la méthode générale. On donne les caractéristiques AB et A de systèmes opposés ; on construit les courbes correspondantes de l'épure des pressions ; la caractéristique A a pour correspondante une spirale logarithmique. Choisissons deux segments suffisamment petits AB et AC de ces deux caractéristiques ; on trouvera le point E, situé à l'intersection des caractéristiques CE et BE, en appliquant la méthode ordinaire ; la seule particularité qu'il y a à remarquer est que le quadrangle ABEC est représenté par un triangle en projection sur

le plan. On détermine successivement les points G, K puis M, N, P, Q et ainsi de suite.

Si l'on prend AB assez petit, on pourra remplacer les arcs qui partent du point A par leurs tangentes et construire la solution conoïde comme solution approchée, mais on obtiendra une plus grande approximation en remplaçant ces arcs par leurs cercles de courbure. Nous allons montrer que l'on peut déterminer les courbures de ces arcs au point A, si l'on connait la courbure de l'un d'eux. A cet effet, reprenons l'équation (34) qui donne la variation de la courbure c de la caractéristique du premier système le long d'une caractéristique du second système. Nous appliquerons cette équation en suivant la caractéristique projetée en A ; nous devons alors poser :

$$\varphi = 0;$$

nous obtenons

$$p \frac{dc}{du} + pc \operatorname{tang} \varphi - \Pi \cos (u + a) = 0.$$

Divisons par p et remplaçons p par la valeur écrite plus haut, nous obtenons l'équation linéaire

$$\frac{dc}{du} + c \operatorname{tang} \varphi = \frac{\Pi}{p_0} \cos (u + a) e^{2 (u - u_0) \operatorname{tang} \varphi}.$$

L'intégrale de l'équation sans second membre est

$$c = v e^{- (u - u_0) \operatorname{tang} \varphi}.$$

L'équation proposée devient alors

$$\frac{dv}{du} = \frac{\Pi}{p_0} \cos (u + a) e^{3 (u - u_0) \operatorname{tang} \varphi}.$$

On trouve, en intégrant deux fois par parties,

$$v = \alpha + \frac{\Pi}{p_0} \frac{\sin (u + a) + 3 \operatorname{tang} \varphi \cos (u + a)}{1 + 9 \operatorname{tang}^2 \varphi} e^{3 (u - u_0) \operatorname{tang} \varphi}$$

Nous simplifierons cette formule en posant :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\omega &= 3\operatorname{tang}\varphi \\ r_1 &= \omega + a \\ h = \frac{p}{\Pi} &= \frac{p_0}{\Pi}\, e^{-2(u-u_0)\operatorname{tang}\varphi} \\ h' &= \frac{h}{\sin(u + r_1)\cos\omega} \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

il vient alors :

$$v = \alpha + \frac{e^{(u-u_0)\operatorname{tang}\varphi}}{h'}$$

$$c = \frac{1}{r} = \alpha\, e^{-(u-u_0)\operatorname{tang}\varphi} + \frac{1}{h'} \qquad (61)$$

On peut construire les différents rayons de courbure de la manière suivante. Les hauteurs h sont représentées par l'épure des pressions ; on construit facilement h'. La constante α est déterminée par le rayon de courbure r_0 de la courbe AB, rayon de courbure que nous supposons connu ; on a

$$\alpha = c_0 - \frac{1}{h'_0} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{h'_0} = \frac{1}{r'_0}$$

On construit la spirale logarithmique :

$$r' = r'_0\, e^{(u-u_0)\operatorname{tang}\varphi}$$

on a alors :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{h'}.$$

On peut construire r'_0 et r en utilisant les propriétés de la division harmonique.

Ayant tracé les cercles de courbure qui remplacent les courbes AE, AG, AK, on construit facilement la caractéristique BEGK ; on peut alors déterminer de deux manières les pressions sur cette caractéristique, ce qui permet d'apprécier les erreurs commises.

On peut encore simplifier les opérations de la manière suivante. Soient : s_0 la longueur de l'arc AB, s la longueur de l'arc AK d'une caractéristique quelconque ; on peut admettre comme première approximation que s est le même que dans la solution conoïde, et écrire :

$$s = s_0 \, e^{(u - u_0) \operatorname{tang} \varphi}.$$

Appelons ε_0 et ε les courbures totales de l'arc A B et de l'arc A K ; on a :

$$\varepsilon = \frac{s}{r}.$$

En remplaçant s et r par leurs valeurs, on trouve

$$\varepsilon = \alpha \, s_0 + \frac{s}{h'} = \frac{s}{h'} + \beta \qquad (62).$$

On détermine la nouvelle constante β en appliquant l'équation à l'arc AB.

Connaissant les courbures des arcs AE, AG, AK, on peut construire ces arcs en les remplaçant par deux tangentes et en prenant la moitié de s pour la longueur de la première tangente. Soit u l'angle qui détermine la première tangente de l'arc AK ; la seconde tangente est déterminée par l'angle

$$u + \varepsilon = u + \frac{s}{h'} + \beta.$$

Construisons un triangle rectangle sur s comme côté, en prenant h' comme second côté ; le rayon de l'épure des pressions perpendiculaires à l'hypothénuse de ce triangle déterminera l'angle

$$u + \frac{s}{h'};$$

il suffira d'ajouter un angle constant pour obtenir la direction de la tangente au point K.

§ 8. DISCONTINUITÉS FINIES.

158. *Surface de discontinuité finie.* — Nous avons déjà annoncé (126) qu'il peut exister, dans un massif en équilibre limite, une surface de discontinuité finie, c'est-à-dire une surface telle, qu'en la traversant, les fonctions p et u subissent des accroissements finis. Considérons la surface projetée sur la ligne MN (fig. 102) ; nous supposons l'état d'équilibre à gauche de NM complètement déterminé ; ainsi au point N les pressions sont représentées par l'épure circulaire ; le point o est le pôle des facettes ; la pression sur la face NM est représentée par SA. Nous pouvons renverser la question et dire : donnons-nous les pressions P sur la surface MN et les angles i que forment ces pressions avec les normales à la surface, et cherchons la solution d'équilibre. Pour construire l'épure circulaire relative au point N, nous construirons l'angle i en CSA et alors nous obtiendrons deux solutions. Nous retrouverons la solution déjà supposée à gauche de NM en supposant que la pression P est représentée par SA ; mais nous trouverons une seconde solution en supposant que cette même pression est représentée par SB ; nous trouverons le nouveau pôle o' des facettes en menant Bo' parallèlement à la facette MN. Si nous adoptons cette seconde solution tout le long de MN, nous pouvons construire un nouvel état d'équilibre et supposer que cet état d'équilibre existe à droite de NM. L'ensemble des deux solutions forme évidemment un état d'équilibre du massif, car il y a équilibre à gauche et à droite de la ligne MN et sur cette ligne on trouve, des deux côtés, des pressions égales et de directions opposées.

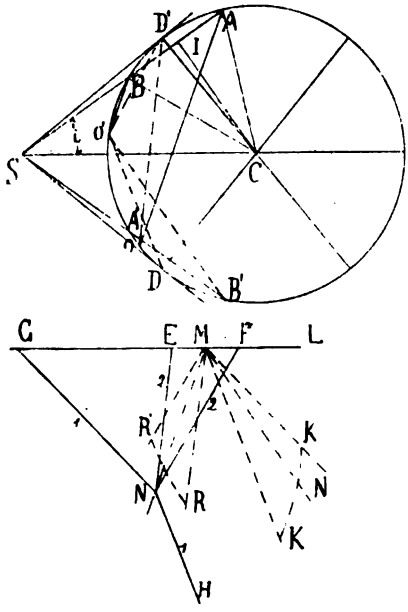

Fig. 102.

Traçons les caractéristiques qui passent par N en utilisant l'épure circulaire et en évitant de prolonger la caractéristique relative à une solution dans la région occupée par l'autre solution ; nous trouvons

NG et NE pour la première solution, NF et NH pour la seconde solution. On voit que les caractéristiques du second système se coupent en N et s'y arrêtent sans pouvoir être prolongées vers le bas, tandis que la caractéristique du premier système traverse en descendant la ligne de discontinuité et y subit une déviation angulaire

$$\Delta u = oDo'.$$

En même temps, la pression subit un accroissement fini et passe de p à p'. Dans la première solution, qui correspond au pôle o, la pression P sur la face NM est représentée par SA et la pression p par SD ; on a donc

$$\frac{p}{P} = \frac{SD}{SA}.$$

Dans la seconde solution, qui correspond au pôle o', la même pression P est représentée par SB ; la pression p' est toujours représentée par SD ; on a donc

$$\frac{p'}{P} = \frac{SD}{SB}.$$

De ces deux équations, on tire

$$\frac{p'}{p} = \frac{SA}{SB}.$$

Lorsque la caractéristique du premier système présente une très forte courbure, on a approximativement

$$dp = 2\,p \operatorname{tang} \varphi\, du ;$$

les accroissements de p et de u sont de même signe. Il en est de même pour une ligne de discontinuité ; on reconnait facilement que l'accroissement de la pression est de même signe que l'accroissement de u. Nous pourrions choisir une disposition où c'est la caractéristique du second système qui subit une déviation instantanée Δu ; on reconnait qu'alors l'accroissement de pression est de signe contraire à Δu ; on voit l'analogie qu'il y a avec la formule

$$\partial p = -2\,p \operatorname{tang} \varphi\, \partial u$$

applicable à une caractéristique du second système à très forte courbure.

On peut construire deux ellipses de pression pour tout point N de la ligne de discontinuité ; chacune d'elles se rapporte à l'une des deux solutions. Les rayons vecteurs qui représentent la pression P sont égaux. Dans la première solution, la pression P est représentée par SA et sa conjugée par SB ; dans la seconde solution, au contraire, la pression P est représentée par SB et sa conjuguée par SA. On voit qu'il y a deux conjuguées de la pression P, l'une plus petite que P à gauche de NM, l'autre plus grande que P à droite de NM.

159. *Discontinuité simple.* — La manière la plus simple de déterminer une solution du problème de l'équilibre limite, est de se donner une ligne arbitraire GML (fig. 102) et les fonctions p et u le long de cette ligne. Nous supposons que GM et ML déterminent deux solutions régulières différentes GMR et LMK ; nous supposons de plus qu'au point M, en se déplaçant de G en L, la fonction u subit un accroissement fini et positif Δu, de sorte que les caractéristiques MR et MK forment un angle

$$\text{RMK} = 2\alpha - \Delta u.$$

Construisons d'abord une solution pseudo-conoïde RMR' telle que les deux caractéristiques MR et MR' du second système forment en M l'angle Δu. Le point M est la projection d'une caractéristique du premier système ; les pressions p sur MR et p' sur MR' satisfont à l'équation

$$p' = p\, e^{2\,\Delta u\, \operatorname{tang} \varphi}.$$

Nous pouvons alors construire une solution ordinaire sur les caractéristiques MR' et MK qui forment un angle égal à 2α. L'ensemble des solutions que nous aurons ainsi construites satisfait à toutes les conditions théoriques du problème ; mais c'est une solution physiquement impossible, car, sur l'espace RMR', il devrait exister trois solutions différentes séparées par les contours apparents MR et MR'. Pour obtenir une solution physiquement possible, nous devons remplacer la solution pseudo-conoïde par une ligne MN de discontinuité finie.

Nous nous donnons la solution commandée par GM ; soit o le pôle des facettes dans l'épure circulaire relative au point M de cette solution. Passons au point M de la solution NMK ; le pôle se déplace brusquement ; le nouveau pôle o' est déterminé par l'angle Δu ; on doit avoir :

$$o\text{D}o' = \Delta u.$$

Supposons le problème résolu ; menons oA et o'B parallèlement à la facette MN de discontinuité ; nous devons obtenir la même pression sur cette facette dans les deux solutions ; on doit avoir :

$$i = \text{CSB} = \text{CSA} ;$$

donc les droites SB et SA ont même direction. Or, on a :

$$\text{arc } oo' = \text{arc BA},$$

$$\text{corde } oo' = \text{corde BA} ;$$

on trouvera donc la droite SBA en menant par S une tangente à la circonférence décrite du point C comme centre et touchant la corde oo'. La direction de la tangente MN à la ligne de discontinuité sera donnée par les droites oA et o'B. Il est évident que la variation de pression n'est plus la même que dans la solution pseudo-conoïde ; la pression augmente toujours en passant d'une valeur p à une valeur p' ; mais on a :

$$p' = p \frac{\text{SA}}{\text{SB}}.$$

Nous pouvons obtenir une seconde solution où la pression décroit au lieu de croitre. Construisons d'abord une solution pseudo-conoïde sur MK et M, en prenant :

$$\text{K'MK} = \Delta u.$$

Le point M est alors la projection d'une caractéristique du second système, et l'on a :

$$p' = p\, e^{-\Delta u \operatorname{tang} \varphi}$$

en désignant par p la pression sur MK' et p' la pression sur MK. On peut alors construire une solution ordinaire sur les caractéristiques MR et MK', qui forment un angle égal à $2a$. L'ensemble des solutions ainsi construites satisfait aux conditions théoriques du problème, mais il y a impossibilité physique à réaliser dans l'étendue KMK' trois pressions différentes. On obtient une solution physiquement possible en remplaçant la solution pseudo-conoïde par une ligne de discontinuité finie.

Cette nouvelle ligne de discontinuité finie s'obtient par la construction qui nous a donné la précédente. En menant par S une tangente

au cercle qui touche la corde oo' et qui a le point C pour centre, on trouve les deux solutions SBA et SA'B' ; la première nous a donné la ligne MN, la seconde nous donnera la ligne MN' parallèle aux droites oA' et $o'B'$; on a alors

$$p' = p \frac{SA'}{SB'};$$

le rapport des pressions est renversé.

On remarquera l'analogie qu'il y a entre la question qui nous occupe et celle du ressaut varié (66). Comme dans le ressaut varié, on ne peut pas se donner arbitrairement les accroissements finis des deux fonctions inconnues ; on peut se donner Δu, mais on doit déterminer convenablement le rapport des pressions. Dans le ressaut varié, nous avons trouvé deux valeurs de la vitesse de l'onde ; nous trouvons ici deux lignes de propagation de la discontinuité finie. Dans les deux cas, le choix de la solution est imposé par les conditions initiales.

160. *Formules.* — Reprenons, pour fixer les idées, le cas de l'augmentation de pression de gauche à droite et proposons-nous de calculer le rapport des pressions au point M. Nous avons trouvé

$$\frac{p'}{p} = \frac{SA}{SB};$$

nous avons aussi

$$\Delta u = oD'o' = \frac{BCA}{2} = BCI = ACI.$$

Dans les triangles ASC et BSC, on peut écrire les proportions

$$\frac{SA}{AC} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i + \Delta u\right)}{\sin i}$$

$$\frac{SB}{AC} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i - \Delta u\right)}{\sin i};$$

On en déduit le rapport SA : SB, et par suite

$$\frac{p'}{p} = \frac{\cos(i - \Delta u)}{\cos(i + \Delta u)} \qquad (47)$$

Il nous reste à calculer l'angle i. Dans le triangle ASC, on a :

$$\frac{AC}{SC} = \frac{\sin i}{\cos \Delta u};$$

or, on a aussi :

$$\frac{AC}{SC} = \frac{CD}{SC} = \sin \varphi;$$

on a donc :

$$\sin i = \sin \varphi \cos \Delta u \qquad (48).$$

On peut vérifier que les formules (47) et (48) sont générales, si on tient compte des signes de i et de Δu.

Dans la solution MN', c'est la caractéristique du second système qui présente une déviation angulaire Δu en passant de gauche à droite de N'M ; l'angle i change de signe ; la formule (47) est toujours applicable, mais la formule (48) devient

$$\sin i = -\sin \varphi \cos \Delta u \qquad (49).$$

Nous pouvons aussi déterminer la ligne de discontinuité M N en calculant les angles β et β' qu'elle fait avec les deux caractéristiques M R et M R'. Si nous mesurons les angles par les arcs correspondants de l'épure circulaire, on a

$$\beta = D'oA = \frac{1}{2} \text{ arc } D'A,$$

$$\beta' = Bo'D' = \frac{1}{2} \text{ arc } BD'.$$

On en déduit :

$$\beta + \beta' = \Delta u \qquad (50),$$

$$\beta - \beta' = \varphi - i \qquad (51).$$

101. *Discontinuité évanouissante.* — Donnons-nous encore les fonctions p et u le long d'une ligne GML (fig. 103), supposons que GM et ML déterminent deux solutions régulières GMR et MKL, mais, contrairement à ce qui précède, supposons que c'est en se déplaçant de droite vers gauche que l'on obtient un Δu positif ; les caractéristiques MR et MK forment alors un angle

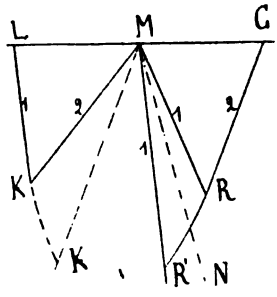

Fig. 103.

$$RMK = 2\alpha + \Delta u.$$

Construisons une solution pseudo-conoïde RMR', sur MR et M, telle que

$$RMR' = \Delta u.$$

Nous pouvons alors construire une solution ordinaire sur les caractéristiques MR' et MK qui forment un angle égal à 2α. Le point M est la projection d'une caractéristique du second système ; la pression p sur M R et la pression p' sur M R' satisfont à la relation

$$p' = p\, e^{-2\,\Delta u \,\operatorname{tang}\varphi}.$$

Nous aurions pu construire la solution pseudo-conoïde KMK' ; le point M est alors la projection d'une caractéristique du premier système, et l'on a

$$p' = p\, e^{2\,\Delta u \,\operatorname{tang}\varphi}.$$

Nous écarterons cette solution en nous imposant une chute de pression.

Mais une autre ambiguïté apparait ; nous pouvons remplacer la solution pseudo-conoïde RMR' par une ligne de discontinuité finie MN ; nous pouvons même poser

$$\Delta u = u' - u = (u_1 - u) + (u_2 - u_1) + \ldots\ldots$$

et obtenir n discontinuités finies. Toutes ces solutions sont physiquement possibles. Nous allons démontrer que, parmi toutes ces solutions, c'est la solution pseudo-conoïde qui donne la plus grande chute de pression.

Remplaçons l'équation (47) par une équation différentielle ; à cet effet, faisons varier u' ou Δu ; supposons que i est déterminé pour chaque valeur de u' par l'équation (49) ; on trouve, en prenant les différentielles logarithmiques des deux membres de l'équation (47) et en réduisant ensuite le second membre au même dénominateur,

$$\frac{dp'}{p'} = \frac{\sin 2\Delta u \,.\, di + \sin 2i \,.\, du'}{\cos^2 \Delta u - \sin^2 i}.$$

En différentiant l'équation (49), on obtient :

$$\cos i \, di = -\sin\varphi \sin \Delta u \, du'.$$

Cette équation permet d'éliminer di de la précédente ; on trouve, en utilisant l'équation (49) et en effectuant quelques réductions,

$$\frac{dp'}{p'} = 2 \operatorname{tang} i \, du'.$$

Cette équation est applicable au cas de n discontinuités finies ; pour la première discontinuité, on fera varier u' de u à u_1 ; pour la seconde discontinuité, on fera varier u' de u_1 à u_2 et l'on prendra

$$\sin i = -\sin \varphi \cos (u' - u_1)$$

et ainsi de suite. Or, la valeur absolue de l'angle i est toujours plus petite que l'angle φ ; on a donc

$$\frac{dp'}{p'} > -2 \operatorname{tang} \varphi \, du'.$$

En intégrant de u à u', on trouve

$$\log \frac{p'}{p} > -2 \Delta u \operatorname{tang} \varphi,$$

ou bien

$$p' > p \, e^{-2 \Delta u \,.\, \operatorname{tang} \varphi}.$$

Cela démontre que la pression p' que l'on obtient par une ou n discontinuités finies est plus grande que celle que l'on obtient par la solution pseudo-conoïde, c'est donc cette dernière qui donne la plus grande chute de pression.

Signalons en passant que les résultats précédents peuvent être mis sous la forme d'un théorème d'analyse. On pose

$$\Sigma \Delta u = u' - u,$$

$$\sin i = -\sin \varphi \cos \Delta u ;$$

on a

$$\mathrm{P}_{u}^{u'} \frac{\cos (i - \Delta u)}{\cos (i + \Delta u)} > e^{-2 (u - u') \operatorname{tang} \varphi}.$$

Le premier membre de cette dernière inégalité représente un produit de termes dont un seul est écrit ; le signe d'inégalité devient un signe d'égalité quand tous les Δu convergent vers zéro.

Je dis maintenant que parmi toutes ces solutions possibles, la solution pseudo-conoïde est la solution stable. En effet, nous pouvons supprimer la discontinuité en M, en modifiant infiniment peu les conditions initiales ; il suffit de supposer que les fonctions varient

très rapidement sur une longueur infiniment petite, voisine du point M. On rend ainsi impossible les solutions discontinues ; il en résulte que ces solutions sont instables. Il faut du reste remarquer que la discontinuité brusque n'existera pas en fait ; si, par exemple, le profil d'un mur est polygonal, l'angle u subit en chaque sommet un accroissement brusque ; mais, en pratique, l'arête vive sera plus ou moins arrondie et la solution continue s'impose si elle est physiquement possible.

Nous aurions pu expliquer de la manière suivante pourquoi la solution qui se produit est précisément celle qui donne la plus grande chute de pression. Supposons un massif de terre limité par GM et reposant sur un mur de soutènement MR'. Nous devons chercher la solution déterminée par la caractéristique MR et admettant le mur comme contour apparent. Au point M, la direction de la caractéristique du second système varie brusquement de MR à MR' ; cela revient à se donner un accroissement fini, Δu, mais la variation de la pression est une inconnue du problème. Nous avons trouvé une infinité d'équilibres limites ; on peut admettre comme évident que si la résistance diminue insensiblement, les terres finiront par adopter l'état d'équilibre qui est le plus favorable à la stabilité du mur et qui constitue le véritable équilibre limite précédant l'éboulement des terres. Cependant cette démonstration n'est pas complète ; elle revient à appliquer le principe de moindre résistance de Moseley ; ce principe n'est pas démontré, il n'est même pas énoncé d'une manière précise.

Les mêmes considérations s'appliquent à la butée des terres ; c'est encore la solution continue, quand elle est possible, qui a la priorité ; mais elle ne donne plus la moindre mais la plus grande résistance.

162. *Construction de la ligne de discontinuité.* — Reprenons le cas d'une ligne de discontinuité finie MN (fig. 102).

Nous avons montré comment on détermine la tangente au premier point ; nous devons indiquer comment on peut tracer approximativement la courbe. Si d'abord nous négligeons les petites quantités du second ordre, nous pouvons appliquer la même méthode que celle qui nous a permis de déterminer la marche d'une onde finie (72). Remplaçons un petit arc de la courbe inconnue par sa tangente MN ; la ligne de discontinuité doit être tracée dans la solution GRM complètement connue et dont elle enlève une partie. Au point N on connait p et u à gauche de la ligne NM ; on en déduit une relation entre les fonctions p', u' au même point N dans la solution inconnue ; c'est la relation qui résulte des équations (47) et (48). Tirons la

caractéristique NF en la remplaçant par sa tangente en F dont la direction est connue ; en suivant la caractéristique FN nous trouvons une seconde relation entre p' et u'. Cela permet de calculer ces quantités. On en déduit une nouvelle tangente au point N de la ligne de discontinuité à laquelle on applique la même méthode et ainsi de suite. Au degré d'approximation que nous avons admis, les deux équations à résoudre peuvent être considérées comme linéaires et le point (p', u') de l'épure des pressions se trouvera à l'intersection de deux droites ; on sait comment on trace la droite qui représente l'équation de la caractéristique (117) ; pour ce qui concerne l'équation (47) on se donne deux valeurs de u' et l'on trouve deux points que l'on joint par une droite. On peut perfectionner les opérations en remplaçant les arcs MN et FN par des cordes auxquelles on donne des directions moyennes entre celles des tangentes extrêmes.

On peut aussi remplacer les arcs de courbes par deux tangentes égales ou approximativement égales, comme nous l'avons fait déjà pour les caractéristiques (118). On donne à l'arc MN une certaine courbure ; on pourra se rapprocher de la courbure véritable en s'inspirant des résultats acquis ou en appliquant la première méthode. On peut alors déterminer p' et u' par l'épure circulaire ; on connait, en effet, au point N, la direction de la ligne de discontinuité et de l'une des caractéristiques : on peut en déduire le nouveau pôle des facettes et le rapport des pressions. On trace alors la caractéristique NF dont on connait les directions des tangentes extrêmes et en suivant cette caractéristique en partant de F, on doit retrouver en N la même valeur de p' que celle que l'on a déjà obtenue. Généralement on trouvera deux valeurs différentes ; en prenant une courbure un peu différente pour MN, les points (p', u') décriront deux courbes qui par leur intersection détermineront les valeurs cherchées. On pourra toujours se placer assez près des valeurs inconnues pour que ces courbes puissent être remplacées par deux droites.

163. *Formation d'une discontinuité finie.* — On provoque la formation d'une ligne de discontinuité finie en créant cette discontinuité à la surface qui limite le massif de terre ; c'est ce que nous avons supposé précédemment. Mais une ligne de discontinuité finie peut aussi se produire dans une solution continue et même régulière ; il suffit pour cela que les caractéristiques d'un système enveloppent une courbe. Reprenons l'exemple du numéro 126 (fig. 80). Les caractéristiques du second système enveloppent une courbe dont le point le plus élevé S est un point de rebroussement ; les deux branches de cette courbe forment deux contours apparents ; la

surface qui représente les pressions se compose de trois nappes : une nappe supérieure venant de droite, une nappe inférieure venant de gauche, une nappe intermédiaire limitée par le contour apparent. Cette solution continue est physiquement impossible ; nous devons y substituer une solution à deux nappes séparées par une discontinuité finie.

Nous reprenons (fig. 104) la caractéristique du premier système EFGHK que nous empruntons à la figure 80 ; EY est une caracté-

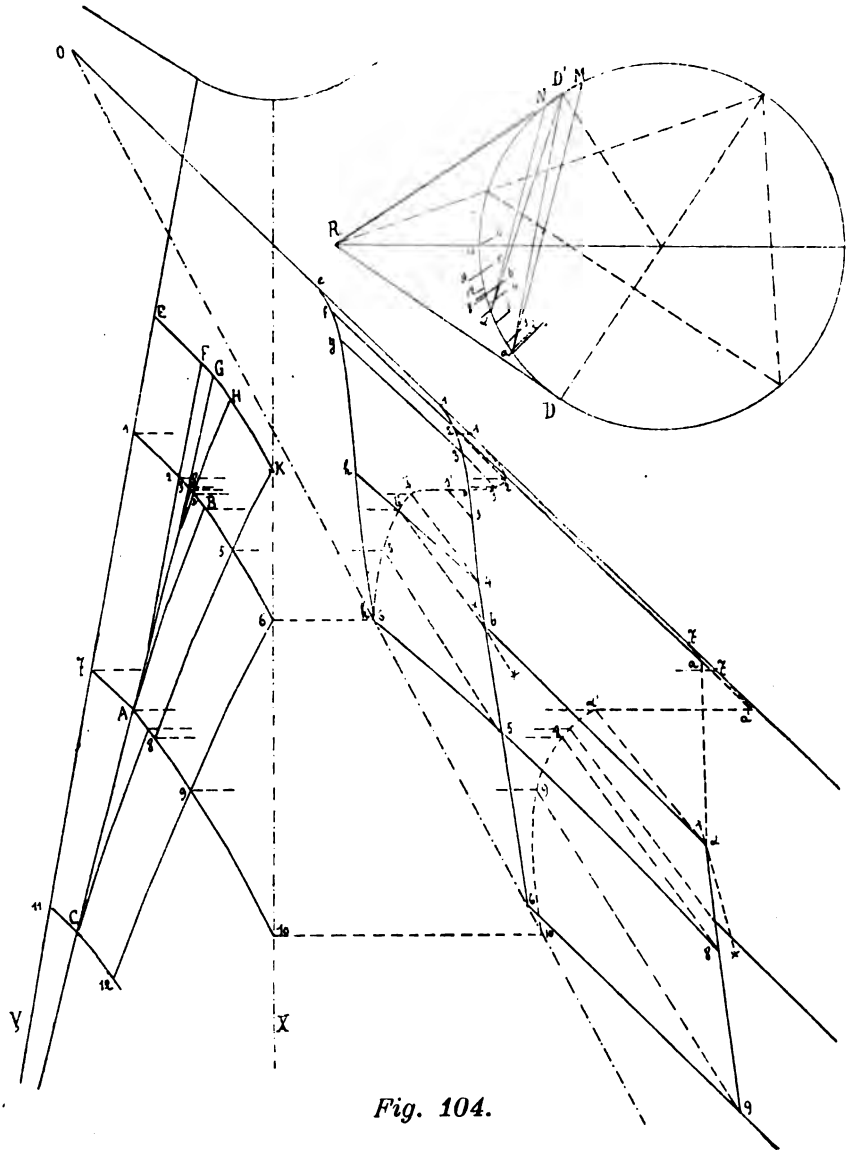

Fig. 104.

ristique rectiligne du second système ; KX est un axe de symétrie. Au lieu de tracer la caractéristique LMNPR, comme nous l'avons fait dans la figure 80, en nous donnant arbitrairement EL, nous prendrons un segment plus petit El de manière que la caractéristique passe par le point le plus haut S du contour apparent. Voici comment on peut arriver à ce résultat : la figure 80 permet de déterminer plus ou moins exactement ce point de rebroussement S et de trouver le nouveau segment El qu'il faut choisir. Les propriétés suivantes permettent de reconnaître si la caractéristique passe au-dessus ou au-dessous du point S.

La caractéristique qui passe au-dessous de S présente deux points de rebroussement ; en ces points, l'équation différentielle de la caractéristique se réduit à

$$dp = 2p \operatorname{tang} \varphi \, du,$$

car la courbure étant infinie, on a :

$$\frac{dy_1}{du} = 0.$$

Sur l'épure des pressions, la courbe qui correspond à cette caractéristique ne présente pas de points singuliers ; aux points qui correspondent aux points de rebroussement, on a :

$$\frac{dp}{p du} = 2 \operatorname{tang} \varphi$$

équation qui exprime que la courbe (p, u) touche une des spirales de la famille

$$p = C e^{2u \operatorname{tang} \varphi}$$

ou forme avec le rayon vecteur un angle dont la cotangente est le double de la tangente de l'angle du frottement. Les points de rebroussements divisent la caractéristique en trois segments ; dans le premier et le troisième, on a :

$$\frac{dy_1}{du} > 0,$$

$$dp = 2p \operatorname{tang} \varphi \, du + \Pi \, dy_1,$$

$$\frac{dp}{p du} > 2 \operatorname{tang} \varphi ;$$

la courbe (p, u) forme avec ses rayons vecteurs un angle plus petit que les spirales. Dans le second segment, on a :

$$\frac{dy_1}{du} < 0$$

$$\frac{dp}{pdu} < 2 \operatorname{tang} \varphi ;$$

la courbe (p, u) forme avec ses rayons vecteurs un angle plus grand que les spirales ; cet angle passe par un maximum.

Lorsque la caractéristique passe au-dessus de S, on a toujours :

$$\frac{dp}{pdu} > 2 \operatorname{tang} \varphi ;$$

la courbe fait toujours avec ses rayons vecteurs un angle plus petit que les spirales.

On peut aussi construire la courbe (y, u) en projetant les points de la caractéristique sur les rayons vecteurs correspondants de l'épure des pressions. Nous avons représenté cette courbe sur la figure 104 par un trait pointillé marqué par :

$$1\ 2\ 3\ s'\ 4\ b'\ 5\ 6 ;$$

la caractéristique est marquée par :

$$1\ 2\ 3\ S\ 4\ B\ 5\ 6 ;$$

la courbe (p, u) par :

$$1\ 2\ 3\ s\ 4\ b\ 5\ 6.$$

Pour une caractéristique passant au-dessous de S, on trouverait deux points de rebroussement où l'on aurait :

$$\frac{dy}{du} = 0 ;$$

la courbe (p, u) a deux tangentes horizontales ; y passe par un minimum et un maximum. Pour une caractéristique passant par S, ces deux points se confondent en un seul ; on a une tangente horizontale inflexionnelle ; c'est ce que nous avons obtenu sur l'épure.

A partir de la caractéristique du premier système qui passe par le point S, le problème doit être posé autrement qu'au numéro 126. La solution déterminée par les caractéristiques 1S et 1Y est conservée dans une certaine étendue comprise entre la caractéristique 1Y et une ligne de discontinuité SAC ; il s'agit de construire cette ligne et en même temps de construire une solution sur la caractéristique S6 pouvant se raccorder à la solution précédente par cette discontinuité finie. Il faut deux fonctions arbitraires pour déterminer une solution ; si on se donnait la ligne de discontinuité SAC, on déterminerait immédiatement les fonctions p et u et la nouvelle solution serait complètement connue ; en laissant la ligne SAC indéterminée, on peut se donner une nouvelle fonction arbitraire ou se donner la caractéristique S6.

La ligne de discontinuité finie est le prolongement de la caractéristique du point S ; il est facile de démontrer qu'il y a contact entre ces deux courbes. En effet, au point S il n'y a pas encore de discontinuité finie ; en se déplaçant infiniment peu, on obtiendra d'abord une discontinuité Δu infiniment petite ; l'épure circulaire indique que dans ce cas la ligne de discontinuité forme un angle infiniment petit avec l'une des caractéristiques.

Donnons-nous la courbure de l'arc SA et remplaçons-le par deux tangentes égales. Nous connaissons le point A du plan, la caractéristique 7A qui passe par ce point et les courbes (p, u) et (y, u) qui correspondent à cette caractéristique. Projetons le point A en a' sur la courbe (y, u) ; nous trouvons immédiatement le point a de la courbe (p, u) ; nous déterminons le pôle a de l'épure circulaire, en menant Da parallèlement au rayon vecteur Oa de l'épure des pressions. Il s'agit d'appliquer les constructions relatives à la discontinuité finie et de chercher, pour la nouvelle solution, les points qui correspondent au même point A dans les courbes (y, u) et (p, u) ainsi que dans l'épure circulaire. Nous désignons ces nouveaux points par des lettres grecques ; le point qui décrit la courbe (p, u) saute brusquement du point a au point α ; le point qui décrit la courbe (y, u) saute brusquement du point a' au point α' ; enfin le pôle de l'épure circulaire saute brusquement du point a au point α. Menons dans l'épure circulaire aM parallèlement à la tangente en A à la ligne de discontinuité ; tirons la droite RNM et portons l'arc NM en αz. Les pressions p' et p du point A sont unies par la relation

$$\frac{p'}{p} = \frac{\text{RN}}{\text{RM}};$$

les directions des nouvelles caractéristiques sont données par le

pôle α. Menons $O\alpha$ parallèlement à la droite $D\alpha$ de l'épure circulaire ; nous déterminerons le point α de la courbe (p, u) par la proportion

$$\frac{O\alpha}{Oa} = \frac{RN}{RM}.$$

Nous pouvons alors tracer l'arc AB en le remplaçant par deux tangentes égales ; la tangente en A est parallèle à la droite $\alpha D'$ de l'épure circulaire, la tangente en B est parallèle à Ob, le point b étant déduit du point B au moyen du point b' de la courbe (y, u). Si la courbure donnée à l'arc SA est la courbure juste, on pourra déduire le point b du point a par l'intégration graphique de l'équation de la caractéristique AB. Nous ne trouverons pas évidemment cette solution par un premier essai ; nous trouverons d'abord deux fausses positions du point a et deux fausses positions du point b ; en joignant ces deux dernières par une droite, nous déterminerons la position juste du point b sur la courbe (p, u) déjà tracée ; nous en déduirons la position juste du point a par une interpolation proportionnelle ; on vérifiera enfin les opérations par la construction définitive.

Connaissant la caractéristique BA et la caractéristique B6, on construit la caractéristique A 8 9 10 par la méthode générale ; la courbe (y, u) qui y correspond est

$$7\ a'\ \alpha'\ 8\ 9\ 10\ ;$$

le point d'inflexion s' de la courbe précédente n'existe plus ; il est remplacé par une lacune $a'\ \alpha'$ qui correspond à la lacune $a\ \alpha$ de la courbe (p, u).

La même méthode permet de construire l'arc AC de la ligne de discontinuité et la caractéristique du premier système qui passe par C ; la courbure de la ligne de discontinuité devient insensible ; les pôles c et γ relatifs au point C diffèrent à peine des pôles relatifs au point A.

On continuerait le tracé de la ligne de discontinuité par le même procédé ; elle finit par couper la caractéristique EY et enlever une partie de la solution linéaire.

164. *Discontinuité double.* — Donnons-nous les fonctions p et u sur une ligne BAC (fig. 105) ; nous supposons que la ligne BA com-

mande une solution régulière ABD, que la ligne AC commande une solution régulière AEC, mais qu'en passant, au point A, de la première à la seconde solution, les fonctions p et u subissent des accroissements finis choisis arbitrairement et ne satisfaisant pas à la condition nécessaire pour obtenir une discontinuité simple. Nous satisferons aux conditions du problème en imaginant une solution continue auxiliaire et en reliant cette solution auxiliaire aux deux autres par deux solutions pseudo-conoïdes.

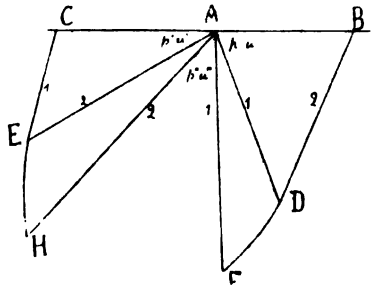

Fig. 105.

Soient respectivement (p, u), (p', u') les valeurs des fonctions inconnues au point A pour la solution ADB et la solution ACE ; soient (p'', u'') les valeurs de ces fonctions au point A de la solution auxiliaire. Nous posons :

$$\alpha = \text{DAF} = u'' - u,$$

$$\beta = \text{HAE} = u' - u''.$$

Ces deux inconnues satisfont d'abord à l'équation

$$\alpha + \beta = u' - u = \Delta u.$$

On a ensuite dans les deux solutions pseudo-conoïdes :

$$\log \frac{p''}{p} = -2\,\alpha \operatorname{tang} \varphi,$$

$$\log \frac{p'}{p''} = 2\,\beta \operatorname{tang} \varphi.$$

D'où l'on tire une deuxième équation entre les deux inconnues

$$\log \frac{p'}{p} = 2\,(\beta - \alpha) \operatorname{tang} \varphi.$$

En résolvant ces deux équations, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Delta u}{2} - \frac{\log \frac{p'}{p}}{4 \operatorname{tang} \varphi} \\ \beta &= \frac{\Delta u}{2} + \frac{\log \frac{p'}{p}}{4 \operatorname{tang} \varphi} \end{aligned}\right\} \quad (63).$$

La première solution pseudo-conoïde est déterminée par la caractéristique AD et la caractéristique projetée en A ; on peut construire la caractéristique AF. La seconde solution pseudo-conoïde est déterminée par la caractéristique AE et la caractéristique projetée en A ; on peut construire AH. On construira ensuite une solution ordinaire sur les caractéristiques AF et AH, et le problème sera résolu.

Il faut cependant, pour que la solution théorique soit physiquement possible, que les angles α et β soient positifs ; il faut pour cela que l'on ait

$$-2\,\Delta u\,\text{tang}\,\varphi < \log\frac{p'}{p} < 2\,\Delta u\,\text{tang}\,\varphi.$$

On déduit de ces inégalités que l'angle Δu doit être positif et que le rapport des pressions doit être compris entre les deux valeurs

$$e^{\pm\,2\,\Delta u\,.\,\text{tang}\,\varphi}$$

Ces deux valeurs sont inverses l'une de l'autre ; il doit en être ainsi car on passe du cas de la plus grande chute de pression à celui de la grande augmentation en se déplaçant dans l'autre sens.

Pour la plus grande chute de pression, on a

$$\log\frac{p'}{p} = -2\,\Delta u\,.\,\text{tang}\,\varphi.$$

$$\alpha = \Delta u,$$

$$\beta = 0.$$

Supposons que la pression p' diminue encore ; on a :

$$\log\frac{p'}{p} < -2\,\Delta u\,.\,\text{tang}\,\varphi,$$

$$\alpha > \Delta u,$$

$$\beta < 0.$$

On a alors la disposition de la figure 106 ; l'espace EAH est

occupé par trois solutions différentes ; il faut remplacer la seconde solution pseudo-conoïde par une discontinuité finie. On a alors :

$$\left.\begin{aligned} \log \frac{p''}{p} &= -2\,(u''-u)\,\operatorname{tang}\varphi \\ \frac{p''}{p'} &= \frac{\cos(i-u''+u')}{\cos(i+u''-u')} \\ \sin i &= \sin\varphi\cos(u''-u') \end{aligned}\right\} \quad (64).$$

En éliminant p'' et i, on trouve une équation transcendante en u'' ; il vaut mieux utiliser l'épure des pressions et l'épure circulaire.

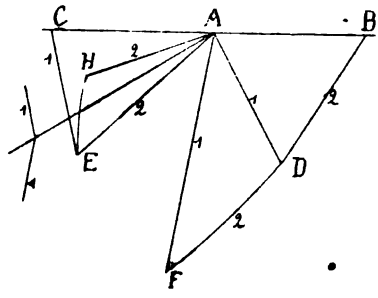

Fig. 106.

En partant du point $(p,\ u)$ on trouve que le point $(p'',\ u'')$ est sur une spirale logarithmique ; en partant du point $(p',\ u')$, on trouve que le point $(p'',\ u'')$ est sur une courbe que l'on construit par points en se donnant différentes valeurs de u'' ; le point $(p'',\ u'')$ se trouve à l'intersection de deux courbes. On peut se demander si l'on peut faire décroitre p' indéfiniment. Supposons que u'' varie ainsi que p' et p'' ; différentions les équations précédentes ; nous reproduirons par la seconde équation des calculs analogues à ceux du numéro 161 ; nous trouverons

$$\frac{dp''}{p''} = -2\operatorname{tang}\varphi\,du'',$$

$$\frac{dp''}{p''} - \frac{dp'}{p'} = 2\operatorname{tang} i\,du'',$$

$$\frac{dp'}{p'} = -2\,(\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang} i)\,du''.$$

La fonction p' est indéfiniment décroissante ; mais il faut remarquer que la ligne de discontinuité tourne avec AH et finira par sortir des limites du massif.

Lorsque l'angle Δu est négatif, l'un des angles α ou β est toujours

négatif ; il y a donc toujours une discontinuité finie. Il peut aussi y en avoir deux. On a alors la disposition de la figure 107 ; les formules deviennent :

$$\left.\begin{aligned} \frac{p''}{p'} &= \frac{\cos(i' - u'' + u')}{\cos(i' + u'' - u')} \\ \frac{p''}{p} &= \frac{\cos(i - u'' + u)}{\cos(i + u'' - u)} \\ \sin i' &= \sin\varphi \cos(u'' - u') \\ \sin i &= -\sin\varphi \cos(u'' - u) \end{aligned}\right\} \quad (65).$$

En éliminant p'', i, i', on trouve une équation transcendante en u'' ; il vaut mieux utiliser l'épure des pressions et l'épure circulaire. On trouve le point (p'', u'') à l'intersection de deux courbes que l'on construit par points. Il peut être utile de remarquer que dans le cas de deux solutions pseudo-conoïdes et dans le cas de deux discontinuités finies, la valeur de u'' est comprise entre les valeurs u et u', tandis que la pression p'' est plus petite ou plus grande que les deux autres pressions. L'inverse se présente quand il y a une discontinuité finie et une solution pseudo-conoïde.

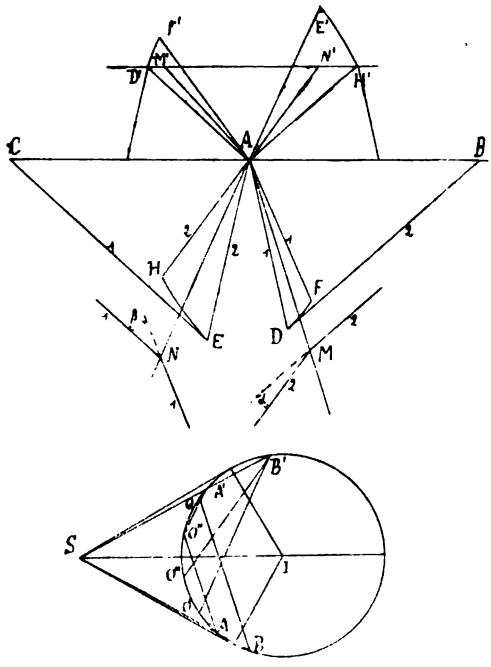

Fig. 107.

165. *Propagation d'une discontinuité double.* — Lorsque la discontinuité double ne donne naissance qu'à une seule ligne de discontinuité finie, on construit d'abord la solution pseudo-conoïde et l'on trace la ligne de discontinuité finie par la méthode exposée au

numéro 162. Le problème devient plus compliqué lorsque la discontinuité double donne naissance à deux lignes de discontinuité finie AX et AY (fig. 108). Remarquons tout d'abord que ces lignes doivent être tracées dans deux solutions complètement connues et dont elles enlèvent une partie. La solution auxiliaire comprise entre ces lignes n'est pas déterminée par deux fonctions arbitraires, mais par deux conditions qui les remplacent. Si on se donnait la ligne AX, soit une fonction arbitraire, la solution auxiliaire serait complètement déterminée ; donc toutes les solutions qui peuvent être reliées à une solution connue par une discontinuité finie dépendent d'une seule fonction arbitraire ; elles sont dans les mêmes conditions que si l'on donnait une des deux fonctions arbitraires qui déterminent la solution la plus générale. La solution auxiliaire doit pouvoir être reliée à deux solutions connues par deux lignes de discontinuité finie ; elle est donc déterminée par deux conditions équivalentes à deux fonctions arbitraires.

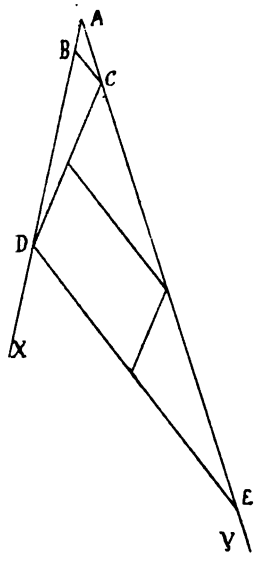

Fig. 108.

Supposons le problème résolu et soient BC, CD, DE, etc., des caractéristiques alternativement du premier et du second système ; nous allons montrer comment on détermine les points BCD du plan et leurs correspondants de l'épure de pression ; nous montrerons ensuite comment on détermine le point E et les autres points des lignes de discontinuité.

Négligeons d'abord les petites quantités d'ordre supérieur au premier. On peut tracer la figure ABCD en remplaçant les lignes de discontinuité et les caractéristiques par des droites dont les directions seront prises au point A. Désignons par a, b, c, d, les points de l'épure des pressions qui correspondent aux points A, B, C, D ; cette épure n'est pas représentée. Le point a est connu ; les points b, c, d se trouvent sur des lignes presque droites que l'on obtient par la construction relative à la discontinuité ; au degré d'approximation que nous avons admis, les trois points a, b, d, sont en ligne droite et forment une ponctuelle semblable à la droite ABD ; il suffit de tracer la ligne décrite par le point d ; le point b décrit une parallèle à cette ligne. Donnons-nous la droite abd comme fausse position ; nous trouverons le point c à l'intersection des droites qui repré-

sentent les équations différentielles des caractéristiques BC et DC ; mais, en général, ce sera une fausse position du point c qui ne se trouvera pas sur la ligne des positions du point c qui résultent des lois de la discontinuité finie. En faisant varier la direction de la droite *abd*, la fausse position du point c décrira une seconde ligne qui déterminera la vraie position de ce point. Il sera nécessaire de perfectionner la construction par la méthode des moyennes.

On obtiendra une exactitude plus grande en tenant compte directement des quantités du second ordre. Donnons-nous, comme fausse position double, les courbures des arcs AD et AC ; on peut déterminer les fonctions inconnues le long de ces arcs et tracer les caractéristiques DC et CB en les remplaçant par deux tangentes égales dont les directions dépendent de la fonction u ; on connait alors les points a, b, c, d de l'épure des pressions. Partons alors des points B et D des deux épures ; appliquons la méthode générale ; nous trouverons un nouveau point (C', c') à l'intersection des caractéristiques BC' et DC'. Les points c et c' sont deux fausses positions d'un même point ; on obtiendra la vraie position en faisant varier les deux courbures, données arbitrairement aux lignes de discontinuité, jusqu'à ce que les deux positions coïncident.

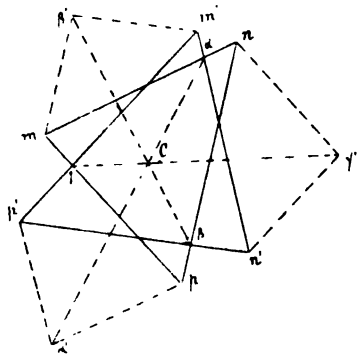

Fig. 109.

Soient : c (fig. 109) la position juste, (m, m') (n, n') (p, p') trois fausses positions. Nous supposons ces trois fausses positions assez voisines de la position juste pour pour admettre que les vecteurs $\overline{c\,m}$ et $\overline{c\,m'}$ sont des fonctions linéaires des erreurs commises sur les courbures ; il en résulte que les coordonnées des points m et m' satisfont à deux équations linéaires ; les coordonnées des points n et n' et celles des points p et p' satisfont à la même relation ; les figures mnp et $m'n'p'$ sont donc des figures affines et le point cherché c est le point double de l'affinité.

Il est facile de démontrer que si l'on a deux figures correspondantes, on en obtiendra deux autres par une homothétie en prenant le point c comme centre de similitude et en adoptant un rapport de similitude quelconque. En effet, on a :

$$\overline{c\,m'} = \varphi\ \overline{c\,m}\ ;$$

on en déduit

$$k\ \overline{c\,m'} = \varphi\ k\ \overline{c\,m}.$$

Appliquons cette remarque aux droites mn et $m'n'$ qui se correspondent ; nous trouverons deux systèmes de droites parallèles qui se correspondent et le point d'intersection α décrit une droite passant par c. Menons par p et p' deux droites respectivement parallèles à mn et à $m'n'$; nous trouverons un second point α' de cette droite. Appliquons le même raisonnement aux deux autres côtés des triangles correspondants ; nous trouverons le point c à l'intersection des trois droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Il en résulte aussi un théorème de géométrie que l'on peut étendre à l'espace à trois dimensions ; connaissant deux tétraèdres qui se correspondent dans une affinité, on trouve le point double à l'intersection de quatre plans.

Le point c est aussi le point qui satisfait à la condition

$$\frac{mnc}{m'n'c} = \frac{npc}{n'p'c} = \frac{pmc}{p'm'c}.$$

Cela résulte de ce que les centres des masses se correspondent dans une affinité, quand les masses des points correspondants sont égales ou dans un rapport constant ; cette propriété peut aussi s'étendre à l'espace.

Lorsque les premiers arcs AC et AD (fig. 108) des deux lignes de discontinuités sont déterminés, les arcs qui suivent s'obtiennent avec beaucoup plus de facilité. Ainsi, on trouvera l'arc CE en construisant la solution DCE déterminée par la caractéristique CD et une seule ligne de discontinuité ; on est ramené au problème du numéro 162. On construira ensuite la solution EDY, déterminée par la caractéristique DE et une ligne de discontinuité, et ainsi de suite.

166. *Formation d'une discontinuité double.* — Nous avons obtenu une discontinuité double à la surface même du massif en y appliquant deux lois de pression différentes.

On peut se demander si une discontinuité double peut se produire au sein d'un massif de terre dans une solution continue. Reprenons la figure 107 ; au-dessous de la ligne CAB, nous avons obtenu deux lignes de discontinuité finie ; supposons que le massif se prolonge vers le haut et déterminons l'état d'équilibre de la partie supérieure en appliquant la méthode générale.

On reconnaît immédiatement, qu'au-dessus de la ligne CAB, les solutions pseudo-conoïdes sont physiquement possibles et que l'on peut construire une solution continue avec une surface libre ne présentant aucune discontinuité apparente. En se donnant cette surface libre, on obtiendra donc deux solutions pseudo-conoïdes,

ayant un foyer commun A, qui se transforment brusquement en deux discontinuités finies. Nous avons appelé (p'', u'') les valeurs des fonctions inconnues au point A pour la solution auxiliaire comprise entre les deux lignes de discontinuité et située au-dessous du point A ; en passant de la solution (p, u) à la solution (p'', u''), la caractéristique du second système subit une déviation brusque qui correspond à un accroissement négatif de u ; on a donc

$$p'' > p.$$

En passant de la solution (p'', u'') à (p', u'), c'est la caractéristique du premier système qui est déviée dans le sens qui correspond à un accroissement négatif de u ; on a donc

$$p'' > p'.$$

Pour le massif supérieur, on doit recommencer les calculs et l'on trouvera, pour la solution intermédiaire, les valeurs $(p''' u''')$ au point A. En examinant le sens de la déviation des caractéristiques dans les solutions pseudo-conoïdes, on trouve

$$p''' < p,$$
$$p''' < p'.$$

En résumé, les lignes BA et AC déterminent deux solutions régulières qui règnent au-dessus et au-dessous de ces lignes ; elles sont séparées par deux solutions auxiliaires différentes ; celle qui règne au-dessus du point A correspond à une dépression, celle qui règne au-dessous de ce point correspond à une surpression.

Au-dessus du point A, la solution intermédiaire est reliée aux deux solutions ordinaires par deux solutions pseudo-conoïdes ; mais cette disposition n'est pas la seule que l'on peut admettre ; on peut, en effet, remplacer ces solutions pseudo-conoïdes par deux lignes de discontinuité finie AN' et AM'. Le problème devient alors indéterminé ; on peut, dans une certaine mesure, se donner arbitrairement les caractéristiques AF'' et AE' et même les solutions F'AM' et E'AN' ; les solutions M'AD' et N'AH' seront déterminées chacune par deux conditions. On pourrait aussi remplacer chacune de ces solutions pseudo-conoïdes par plusieurs discontinuités finies.

Nous avons montré précédemment que la solution continue physiquement possible a la priorité sur la solution discontinue ; si la surface limite du massif était réellement BAC, si le massif était situé

au-dessus de cette surface et s'étendait jusqu'à une paroi supérieure, on pourrait substituer, aux accroissements discontinus des fonctions inconnues, des accroissements continus sur une longueur très petite voisine du point A et montrer l'instabilité de la solution discontinue. Mais le problème n'est pas posé de cette manière ; la surface BAC est une surface idéale, la surface limite est au-dessus ; elle peut être une surface libre ou une surface soumise à certaines pressions ; dans ce cas, la solution est stable lorsqu'elle varie infiniment peu pour une variation infiniment petite des conditions limites ; on reconnait facilement que toutes les solutions obtenues plus haut sont stables ; ainsi, par exemple, la discontinuité N'A est stable, car si on substitue en N' une variation rapide à la variation discontinue, les caractéristiques du second système se coupent, déterminent une enveloppe, ce qui démontre que la discontinuité finie se produit un peu plus bas.

Parmi toutes ces solutions stables, il y en a cependant qui sont peu probables ; la solution continue exige que la surface libre soit calculée de telle manière que les caractéristiques convergent en deux foyers coïncidants ; il est infiniment peu probable qu'elle soit jamais réalisée. La solution qui peut se présenter effectivement est l'intersection de deux lignes de discontinuité finie N'AN et M'AM en un point A. Il nous sera facile de démontrer que les accroissements de u et les rapports des pressions se propagent sans altération au-delà du point d'intersection, mais que les lignes de discontinuité sont déviées comme les caractéristiques.

En effet, nous avons trouvé au-dessous du point A :

$$u - u'' = \alpha$$
$$u'' - u' = \beta$$

Nous satisferons aux conditions du problème en prenant au-dessus du point A

$$u - u''' = \beta$$
$$u''' - u' = \alpha$$

car les rapports des pressions sur une ligne de discontinuité ne dépendent que de l'accroissement de l'angle u, nous conservons le même rapport sur N'AN et le même rapport sur M'AM ; nous avons donc au-dessus du point A, les pressions

$$p, \quad p''' = p\,\frac{p'}{p''}, \qquad p'''\,\frac{p''}{p} = p'.$$

La déviation des lignes de discontinuités est rendue évidente par l'épure circulaire (fig. 107). Soient : o, o', o'' et o''' les pôles qui correspondent aux valeurs u, u', u'', u''' ; les angles α et β sont représentés par des angles inscrits dans la circonférence et ont pour mesure la moitié de l'arc compris entre les côtés ; on a donc

$$\alpha = \frac{oo''}{2} = \frac{o'''o'}{2},$$

$$\beta = \frac{o''o'}{2} = \frac{oo'''}{2}.$$

Les points o'' et o''' sont donc symétriquement placés par rapport au milieu de l'arc oo'. Suivons, par exemple, la direction de la ligne de discontinuité de seconde espèce ou N'AN ; la direction du côté N'A est donnée par o'''B' ; celle de AN est donnée par o''A' ou o'B' ; l'angle de ces deux côtés a donc pour mesure la moitié de l'arc de $o'''o'$; il est égal à α.

Reprenons la disposition de la figure 105 ; nous avons obtenu deux solutions pseudo-conoïdes au-dessous de la surface BAC ; on pourrait les remplacer par deux discontinuités finies, mais on obtiendrait ainsi une solution instable. Construisons l'état d'équilibre d'un massif supérieur à la surface BAC ; on reconnait facilement que les solutions pseudo-conoïdes sont physiquement impossibles, qu'il faut les remplacer par deux lignes de discontinuité finie et que les solutions partielles qui forment la solution du problème sont complètement déterminées. Mais si la surface BAC est une surface idéale, si le massif est limité par une surface supérieure libre ou pressée, la solution que nous venons de construire est instable, car il suffirait de transformer la discontinuité finie en variation rapide mais continue, pour obtenir une solution continue. Il n'est donc pas possible de réaliser par un massif supérieur les pressions qui donneraient naissance à la disposition de la figure 105.

Entre les dispositions des figures 105 et 107, il existe un grand nombre de dispositions intermédiaires. Pour les déduire de la figure 107, nous ferons décroitre le rapport p' à p en diminuant l'angle α et en augmentant β de la même quantité ; quand l'angle α sera égal à zéro, nous aurons une discontinuité simple. Au-dessus du point A, on peut prolonger cette discontinuité ou la remplacer par une solution pseudo-conoïde ; mais comme cette dernière réalise un plus grand rapport de pressions, il faut supposer deux solutions pseudo-conoïdes pour satisfaire exactement aux conditions du pro-

blème. En continuant à faire décroitre le rapport des pressions, on trouvera une solution pseudo-conoïde unique au-dessus de la surface BAC et l'on trouvera en dessous une discontinuité finie et une solution pseudo-conoïde de peu d'étendue. Ces solutions sont infiniment peu probables quand on choisit arbitrairement une surface supérieure. Si la pression p' continue à diminuer on trouve des dispositions impossibles à réaliser par un massif supérieur. En résumé, si l'on écarte les solutions impossibles et les solutions infiniment peu probables, on trouve que la discontinuité double ne peut être réalisée que par l'intersection de deux lignes de discontinuité simple.

167. *Discontinuité à la surface libre.* — Les considérations qui précèdent ne s'appliquent pas à la surface libre, car un point de la surface libre où la pression est nulle, ne peut être le foyer d'une solution pseudo-conoïde ; à la surface libre, les solutions coniques ou pseudo-coniques remplacent les solutions pseudo-conoïdes. Nous avons vu précédemment (153) que si le profil du terrain présente un angle fini, on ramène la question au cas d'un angle rectiligne en appliquant le principe de similitude. Chacun des côtés commande alors une solution linéaire et ces deux solutions linéaires sont réunies par une solution conique déterminées par deux caractéristiques. Si l'angle de ces deux caractéristiques est plus petit que l'angle ordinaire (126 et 151), la solution conique est à trois nappes ; la nappe principale, dont les caractéristiques sont convexes vers le sommet, recouvre deux parties des solutions voisines ; ces deux parties sont recouvertes par trois nappes différentes. Cette solution continue est physiquement impossible ; il faut construire une nouvelle solution conique reliée aux deux solutions linéaires par deux lignes de discontinuité finie. On détermine ces lignes de discontinuité par la méthode des fausses positions ; on se donne arbitrairement les directions de ces deux droites et on raisonne comme au numéro 165. En continuant le tracé de ces deux lignes de discontinuité, on n'obtiendra pas exactement deux lignes droites, à cause des petites erreurs commises dans la détermination des directions initiales, mais l'influence de ces erreurs va sans cesse en diminuant, on trouve une solution asymptotique à la solution exacte (123).

Nous avons dit plus haut que les caractéristiques de la nappe principale de la solution conique théorique étaient convexes vers le sommet ; nous allons trouver qu'il en est de même de la solution conique nouvelle comprise entre les deux lignes de discontinuité. Nous démontrerons, dans ce but, le théorème suivant : toute ligne droite de discontinuité menée dans une solution linéaire détermine

une nappe de solution conique dont les caractéristiques sont convexes vers le sommet.

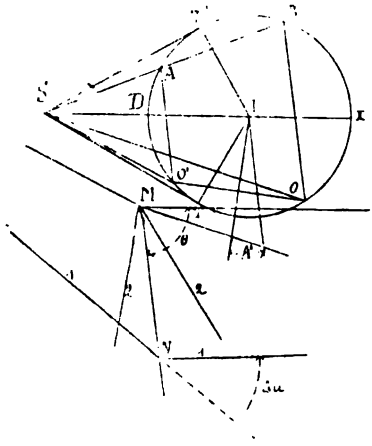

Fig. 110.

Soient, figure 110 : MN la ligne de discontinuité, SA, SB, les rayons qui représentent la pression en N sur la facette de discontinuité. Les deux pôles o et o' s'obtiennent en menant Ao' et Bo parallèlement à MN ; nous supposons que le pôle o correspond à la droite de NM et le pôle o' à la gauche de NM. Nous savons que les pressions p et p' à droite et à gauche de NM satisfont à la proportion

$$\frac{p}{SA} = \frac{p'}{SB};$$

on a donc

$$p' > p.$$

Nous pouvons aussi construire deux solutions linéaires fictives sur MN en adoptant les pôles o et o' ou les angles u et u' ; nous pouvons prendre MN égale à l'unité et alors les pressions q et q' au point N dans les deux solutions linéaires sont déterminées par la formule (50) du numéro 132. On a

$$q = \Pi \frac{\sin\theta - \sin\varphi \sin(2u - \theta)}{\cos\varphi} \qquad (50).$$

On obtient q' en remplaçant u par

$$u' = u + \Delta u.$$

On en déduit

$$q' - q = -2\,\Pi \operatorname{tang}\varphi \sin\Delta u \cos(2u + \Delta u - \theta).$$

Les angles u et u' sont les angles formés par les droites Do et Do' avec l'axe horizontal Sx ; les angles $2u$ et $2u'$ sont les angles formés par les droites Io et Io' avec le même axe horizontal ; on en conclut

que la bissectrice de l'angle oIo' fait avec l'axe horizontal un angle

$$\frac{2u + 2u'}{2} = 2u + \Delta u$$

et avec MN un angle

$$A' = 2u + \Delta u - \theta.$$

Posons

$$A = BAo' = Ao'o = A' + \frac{\pi}{2};$$

la différence des pressions devient

$$q' - q = -2\,\Pi \operatorname{tang} \varphi \,.\, \sin \Delta u \,.\, \sin A.$$

Donnons-nous l'angle i ou la direction de la droite SB ; nous obtiendrons toutes les positions du pôle o' en faisant varier l'angle A de zéro à π. Cela est vrai quel que soit i. On a donc

$$q > q'.$$

Il y a cependant une exception ; l'inégalité devient une égalité quand le pôle o' vient en B ; écartons provisoirement ce cas pour l'examiner plus loin. Des deux inégalités qui existent entre p et p' et q et q', on déduit

$$p' + q > p + q'$$
$$p' - q' > p - q$$

Supposons que la solution linéaire règne à droite de NM, on a

$$p = q ;$$

l'inégalité précédente devient

$$p' - q' > 0.$$

On a donc à gauche de NM une solution à forte pression ; or, c'est une nappe de première espèce ; donc les caractéristiques sont convexes vers le sommet (134) et la nappe n'est pas limitée par une caractéristique mais par un contour apparent.

On arrive à la même conclusion, si l'on admet une solution linéaire à gauche de NM ; on a alors

$$p' - q' = 0$$
$$p < q.$$

On trouve à droite de NM une solution à faible pression ; or, c'est une nappe de seconde espèce ; donc les caractéristiques sont encore convexes vers le sommet et la nappe n'est pas limitée par une caractéristique mais par un contour apparent.

Examinons le cas d'exception ; le pôle o' est en B, le pôle o en A ; les talus des solutions linéaires sont parallèles à AB ; la ligne de discontinuité est aussi parallèle a AB, elle se confond donc avec le talus ; si l'on suppose la poussée des terres sous le talus, on trouvera une seconde solution linéaire qui est la butée des terres au-dessus du talus, mais elle disparaît complètement si l'on écarte les pressions négatives. Le cas d'exception n'existe donc pas et tout ce que l'on peut déduire des considérations précédentes, c'est qu'en menant une ligne de discontinuité faisant un angle infiniment petit avec le talus d'une solution linéaire, on engendre une nappe à contours apparents qui tend à devenir une solution linéaire quand son étendue se réduit à zéro ; les deux solutions linéaires sont les deux solutions qui sont désignées par la poussée et la butée des terres.

On déduit de là que la discontinuité à la surface libre est toujours une discontinuité double ; en effet, s'il y a une ligne de discontinuité, il se forme une nappe sans caractéristique qui ne peut être reliée à une autre solution linéaire que par une seconde ligne de discontinuité finie. Nous avons vu qu'on peut se donner les pressions sur une surface idéale et déterminer la surface libre du massif qui peut les engendrer ; s'il y a une discontinuité finie dans ces pressions, elle peut s'éteindre ou se prolonger jusqu'à la surface libre ; dans ce dernier cas, il se formera une seconde ligne de discontinuité qui sera en quelque sorte une réflexion de la première sur la surface libre.

Les considérations qui précèdent peuvent aussi s'appliquer au cas de deux solutions coniques quelconques reliées par une ligne droite de discontinuité. Le rapport des pressions p' et p dépend de Δu ; on pourra toujours se donner des pressions assez fortes pour avoir deux solutions à fortes pressions ; on a alors des caractéristiques convexes vers le sommet à gauche de NM et concaves à droite de NM. Si les pressions diminuent, les courbures diminuent, et quand on a

$$p - q = 0,$$

on a une solution linéaire à droite de NM et des caractéristiques convexes à gauche. Si les pressions continuent à diminuer, on obtient des caractéristiques convexes à droite et à gauche de NM, jusqu'au moment où l'on a :

$$p' - q' = 0.$$

On a alors une solution linéaire à gauche de NM. Si on diminue encore les pressions, on obtient deux solutions à faibles pressions ; les caractéristiques sont concaves à gauche de NM et convexes à droite.

Il existe enfin une relation approchée entre la solution théorique continue déterminée par deux caractéristiques et la solution discontinue qui donne la solution du problème. Nous allons démontrer que si, dans une solution conique, on mène une ligne droite de discontinuité faisant un angle très petit avec l'une des caractéristiques rectilignes, on obtient une nouvelle solution conique qui diffère peu d'une solution construite sur cette caractéristique rectiligne.

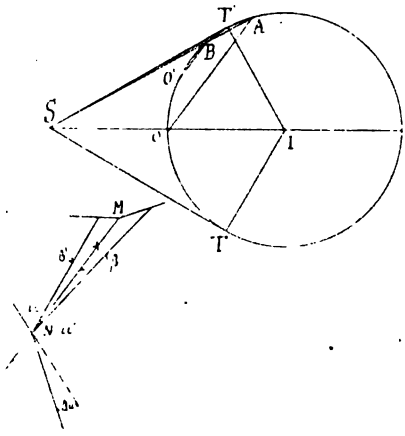

Fig. 111.

Soient, figure 111 : MN la ligne de discontinuité, o le pôle de l'épure circulaire relative au point N pour la gauche de NM, o' le pôle de l'épure circulaire relative au même point N pour la droite de NM. Nous supposons que la ligne MN forme un angle très petit avec la caractéristique du second système ; cet angle β est représenté par AoT' ; on en conclut que l'angle β′ ou $Bo'T'$ est aussi très petit. Nous considérerons l'angle

$$\Delta u = \beta + \beta'$$

comme une quantité très petite du premier ordre, et nous négligerons les quantités très petites d'ordre supérieur.

Nous avons trouvé (160)

$$\sin i = \sin \varphi \cos \Delta u ;$$

on en déduit

$$i = \varphi.$$

L'angle AST′ est donc négligeable. On a aussi (160)

$$\beta' - \beta = i - \varphi = 0 ;$$

et par conséquent

$$\beta = \beta' - \frac{\Delta u}{2}.$$

Le rapport des pressions est donné par la formule (47) qui est

$$\frac{p'}{p} = \frac{\cos(i - \Delta u)}{\cos(i + \Delta u)}$$

et qui devient :

$$p' = p\,(1 + 4\,\beta\,\text{tang}\,\varphi).$$

Si on suppose MN égal à l'unité, on peut écrire

$$q' = q\,(1 + 4\,\beta\,\text{tang}\,\varphi).$$

Nous avons établi (136) des formules qui permettent de calculer les fonctions q, u, θ dans les environs d'une caractéristique ; nous pouvons aussi résoudre le problème inverse : on donne q, u, θ ; on demande les valeurs q_0, u_0, θ_0 qui correspondent à la caractéristique. La formule (58) du numéro 136 a été établie pour une caractéristique du premier système ; pour l'appliquer à une caractéristique du second système, il suffit de changer les signes de a et de Π ; on a alors

$$(q - q_0) - 2\,q\,\text{tang}\,\varphi\,.\,(u - u_0) = \frac{\Pi\cos\theta + q\cos 2\,a}{\sin 2\,a}(\theta - \theta_0).$$

Nous avons supprimé l'indice zéro des coefficients, ce qui est permis à l'approximation que nous avons admise. Il nous faut deux nouvelles équations pour trouver les trois inconnues ; ce sont :

$$u_0 + a - \theta_0 = 0,$$
$$q_0 = \Pi\cos(\theta_0 - 2\,a) = \Pi\cos[\theta - 2a - (\theta - \theta_0)].$$

Nous introduirons les différences en retranchant respectivement ces équations de :

$$u + a - \theta = \beta,$$
$$q = q.$$

Nous obtenons :

$$u - u_0 = (\theta - \theta_0) + \beta,$$
$$(q - q_0) = q - \Pi\cos(\theta - 2a) - \Pi\,(\theta - \theta_0)\,\sin(\theta - 2a).$$

On trouve les trois différences par la résolution de trois équations linéaires ; on obtient

$$(\theta - \theta_0)\,\text{tang}\,\varphi = \frac{q - \Pi\cos(\theta - 2a) + 2\,q\,\beta\,\text{tang}\,\varphi}{3q + \Pi\cos(\theta - 2a)}$$

Pour appliquer cette formule à la solution engendrée par la discontinuité finie, on doit remplacer q par q' et β par β' ou β pris en signe contraire ; on trouve que le numérateur ne change pas et que le dénominateur varie d'une quantité négligeable. On peut donc dire que $\theta - \theta_0$ ne change pas à l'approximation admise ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

On peut déduire de ce théorème que la solution conique qui s'appuie sur deux solutions linéaires par deux discontinuités finies diffère très peu de la nappe principale de la solution théorique continue, lorsque l'angle des caractéristiques qui déterminent la solution intermédiaire diffère peu de l'angle ordinaire des caractéristiques de systèmes opposés.

168. *Analogie avec le ressaut double.* — Lorsque nous avons étudié la propagation d'une onde finie, nous avons reconnu l'existence d'une relation obligée entre les vitesses à la base et au sommet de l'onde ; nous avons montré (67) que si cette relation n'existe pas, on se heurte à des impossibilités manifestes en admettant une onde unique. Cependant, on peut supposer qu'une discontinuité quelconque soit réalisée à l'instant t par un barrage et des manœuvres hypothétiques ; on est en droit de se demander ce qu'il se passera dans les instants suivants. Puisque l'onde unique est impossible, il faut en conclure qu'il se produira un phénomène plus compliqué. Nous ne l'avons pas étudié dans le chapitre précédent, mais nous pouvons combler cette lacune en appliquant au mouvement varié la théorie de la double discontinuité.

Soient (figure 112) (u, H') (u', H') les deux systèmes de valeurs qui caractérisent la discontinuité entre les deux axes hydrauliques CA et A'B ; ces deux axes commandent des surfaces hydrauliques représentées en plan par CAD et ABE. Les caractéristiques AE et AD sont de systèmes opposés, mais elles ne déterminent pas une solution ordinaire, à cause de la discontinuité qui existe au point A. Soit (u'', H'') un système de valeurs intermédiaire à déterminer convenablement. Nous pouvons construire une solution pseudo-conoïde EAF sur les

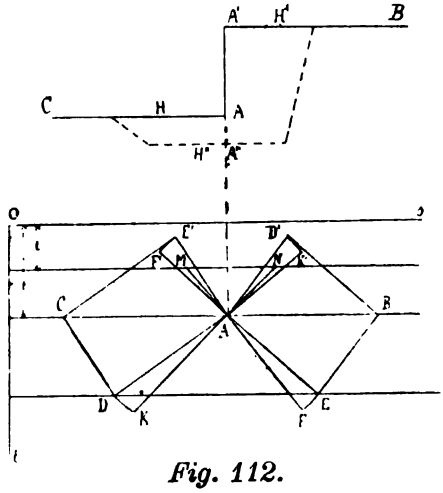

Fig. 112.

deux caractéristiques AE et le point A (ou A'A'') considéré comme caractéristique d'aval. L'équation de cette caractéristique d'aval (50 et 70) est

$$-d\,\mathrm{H} + \sqrt{\frac{h}{g}}\,du = 0.$$

En séparant les variables, on a :

$$u - \int \sqrt{\frac{g}{h}}\,d\,\mathrm{H} = \mathrm{C}.$$

Posons

$$\psi\,(\mathrm{H}) = \int \sqrt{\frac{g}{h}}\,d\,\mathrm{H},$$

et remarquons que cette fonction croit dans le même sens que la variable. Nous déduisons de l'intégrale générale une intégrale définie entre les limites (u', H') et (u'', H'') ; nous trouvons :

$$u'' - \psi\,(\mathrm{H}'') = u' - \psi\,(\mathrm{H}')$$

Construisons de même une solution pseudo-conoïde sur la caractéristique AD et le point A considéré comme la projection d'une caractéristique d'amont A A''. Le radical des formules précédentes change de signe, de sorte que l'on a :

$$u'' + \psi\,(\mathrm{H}'') = u' + \psi\,(\mathrm{H})$$

Les inconnues u'' et $\psi\,(\mathrm{H}'')$ sont déterminées par deux équations ; en les résolvant, on trouve :

$$\left.\begin{aligned} u'' &= \frac{u + u'}{2} + \frac{\psi\,(\mathrm{H}) - \psi\,(\mathrm{H}')}{2} \\ \psi\,(\mathrm{H}'') &= \frac{u - u'}{2} + \frac{\psi\,(\mathrm{H}) + \psi\,(\mathrm{H}')}{2} \end{aligned}\right\} \quad (66).$$

Supposons, pour fixer les idées, H plus petit que H' ; faisons varier la différence des vitesses. La fonction ψ varie dans le même sens que la variable ; nous ferons donc croitre H'' en faisant croitre $u - u'$ ou en faisant décroitre l'accroissement

$$\Delta u = u' - u.$$

Posons

$$\alpha = \psi(H') - \psi(H) ;$$

on trouve facilement les résultats suivants :

pour	$\Delta u > \alpha$,	$H'' < H$;
»	$\Delta u = \alpha$,	$H'' = H$;
»	$-\alpha < \Delta u < \alpha$,	$H' > H'' > H$;
»	$\Delta u = -\alpha$,	$H'' = H'$;
»	$\Delta u < -\alpha$,	$H'' > H'$.

Immédiatement après l'instant initial, il se forme un axe hydraulique à la hauteur H'' entre les axes de hauteur H et H' ; le niveau de cet axe est inférieur, intermédiaire ou supérieur aux niveaux des deux autres, selon la valeur de Δu.

Cherchons dans quel cas les solutions pseudo-conoïdes sont physiquement possibles. La direction des caractéristiques d'amont qui émergent du foyer A est déterminée par l'équation

$$\frac{ds}{dt} = v = u + \sqrt{g h} ;$$

en suivant la caractéristique d'aval A' A'', on a :

$$dv = du + \frac{dh}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} = \left(dH + \frac{dh}{2} \right) \sqrt{\frac{g}{h}} .$$

Nous avons démontré (52) la relation

$$dh = \left(1 - \frac{h}{k} \right) dH ;$$

on a donc

$$dv = \frac{dH}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \left(3 - \frac{h}{k} \right) .$$

Nous avons fait remarquer (69) que, pour les sections de forme ordinaire, on a toujours

$$\frac{h}{k} < 3 ;$$

il en résulte que la vitesse v varie dans le même sens que H.

Il existe cependant des sections à talus convexes vers le haut, pour lesquelles cette inégalité est renversée ; il serait bien facile de traiter ce cas également, mais ces sections sont exceptionnelles.

Remarquons aussi qu'il y a une section de passage, pour laquelle on a constamment

$$\frac{h}{k} = 3.$$

Pour interpréter cette équation, remarquons que l'on a

$$d \log \frac{\omega^3}{l} = \frac{3\,d\omega}{\omega} - \frac{dl}{l} = \left(\frac{3}{h} - \frac{1}{k}\right) d\mathrm{H}.$$

On voit que la section de passage satisfait à la condition

$$\frac{\omega^3}{l} = a,$$

a désignant une quantité constante.

Si nous tirons de cette équation la valeur de ω, si nous différentions en remarquant que

$$d\omega = l d\mathrm{H},$$

nous obtenons une équation différentielle entre l et H dont l'intégrale est

$$l^3 = \frac{a}{8\,(b - \mathrm{H})^3}.$$

On détermine les constantes a et b en se donnant pour H_0 les valeurs ω_0 et l_0 ; la formule donne la forme des talus pour les valeurs de H supérieures à H_0. Pour cette section de forme spéciale, la vitesse v est constante ; on est obligé de calculer la variation de

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

pour connaître la situation de la solution pseudo-conoïde.

Si l'on écarte les sections de forme extraordinaire, v varie dans le même sens que H ; en faisant décroitre H de H' à H'', v décroit et par conséquent la solution EAF est physiquement possible. On peut appliquer le même raisonnement aux caractéristiques qui émergent du foyer A dans la solution DAK ; on doit changer le signe du radical ; c'est donc en faisant croître H de H'' à H que l'on obtiendra des valeurs décroissantes de v et que la solution DAK sera physiquement possible. Les deux solutions pseudo-conoïdes sont donc physiquement possibles lorsque H'' est plus petit que H et que H' ; cela se présente lorsque l'on a

$$\Delta u > \alpha.$$

Si l'accroissement Δu est pris égal à α, l'une des solutions pseudo-conoïdes disparait.

Si nous continuons à faire décroitre l'accroissement de vitesse, la valeur de H'' devient supérieure à H et la solution DAK devient physiquement impossible ; il faut y substituer une ligne de discontinuité finie ; les équations du problème deviennent alors :

$$\left.\begin{aligned} u'' - \psi(H'') &= u' - \psi(H') \\ u'' - u &= -\sqrt{g\,\frac{(\omega'' - \omega)(\omega''\eta'' - \omega\eta)}{\omega\,\omega''}} \end{aligned}\right\} \quad (67).$$

On en déduit :

$$\Delta u = \psi(H') - \psi(H'') - \sqrt{g\,\frac{(\omega'' - \omega)(\omega''\eta_1'' - \omega\eta_1)}{\omega\,\omega''}} \qquad (68).$$

En faisant croitre H'', on fait décroitre la valeur de l'accroissement de vitesse ; en prenant H'' égal à H', on trouve

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= -\beta \\ \beta &= \sqrt{g\,\frac{(\omega' - \omega)(\omega'\eta' - \omega\eta_1)}{\omega_1\omega'}}. \end{aligned}\right\} \quad (69).$$

Il résulte de là que l'on obtiendra un niveau intermédiaire H'' limité à l'aval par une solution pseudo-conoïde et à l'amont par un ressaut d'élévation, lorsque l'on aura

$$\alpha > \Delta u > -\beta$$

Si on continue à faire croitre H″. on trouve deux ressauts et les équations du problème deviennent :

$$\left.\begin{aligned} u'' &= u - \sqrt{g\,\frac{(\omega'' - \omega)\,(\omega''\,\eta_1'' - \omega\,\eta_1)}{\omega\,\omega''}}, \\ u' &= u'' - \sqrt{g\,\frac{(\omega'' - \omega')\,(\omega''\,\eta_1'' - \omega'\,\eta_1')}{\omega'\,\omega''}}. \end{aligned}\right\} \quad (70).$$

On en déduit

$$\Delta u = -\sqrt{g\,\frac{(\omega'' - \omega)\,(\omega''\,\eta_1'' - \omega\,\eta_1)}{\omega\,\omega''}} - \sqrt{g\,\frac{(\omega'' - \omega')\,(\omega''\,\eta'' - \omega'\,\eta_1')}{\omega'\,\omega''}} \quad (71)$$

En faisant croitre H″, la valeur de Δu diminue de plus en plus. On voit donc que l'on obtiendra un niveau H″ supérieur aux deux autres lorsque l'on aura :

$$\Delta u < -\beta.$$

La substitution des discontinuités finies aux solutions pseudo-conoïdes physiquement impossibles n'a pas changé considérablement la discussion des différents cas ; la valeur de l'accroissement Δu qui correspond au cas où H″ devient égal à H′ est devenue

$$-\beta \text{ au lieu de } -\alpha.$$

Les quantités α et β diffèrent même très peu lorsque la hauteur du ressaut n'est pas très grande. Si nous posons

$$H' = H + \varepsilon$$

on peut développer en série les valeurs de α et de β ; on trouve, par des calculs faciles analogues à ceux du numéro 48 :

$$\beta = \varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{4h} + \frac{\varepsilon}{4k} + \ldots\right)\sqrt{\frac{g}{h}},$$

$$\alpha = \varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{4h} + \frac{\varepsilon}{4k} + \ldots\right)\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

On voit que les valeurs de α et β ne diffèrent que par les termes du troisième ordre par rapport à ε.

La quantité α représente la différence des vitesses au foyer d'une solution pseudo-conoïde qui correspond à une dénivellation H' — H ; la quantité β représente la différence des vitesses sur une ligne de discontinuité finie réalisant la même dénivellation. Nous allons démontrer que la valeur absolue de la différence des vitesses est toujours plus grande pour la discontinuité finie que pour la solution pseudo-conoïde.

En effet, nous pouvons mettre l'équation qui détermine la qnantité β sous les formes suivantes :

$$\frac{\beta^2}{g} = \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'}\right)(\omega' \eta' - \omega \eta)$$

$$\frac{\beta^2}{g} = \int \frac{d\omega}{\omega^2} \times \int \omega \, d\mathrm{H}$$

$$\frac{\beta^2}{g} = \int \mathrm{X} \, d\mathrm{H} \times \int \mathrm{Y} \, d\mathrm{H}.$$

en posant :

$$\mathrm{X} = \frac{l}{\omega^2}, \quad \mathrm{Y} = \omega.$$

Nous mettrons l'équation qui donne α sous les formes suivantes :

$$\frac{\alpha}{\sqrt{g}} = \int \frac{d\mathrm{H}}{\sqrt{h}} = \int \sqrt{\frac{l}{\omega}} \cdot d\mathrm{H}$$

Or, on a :

$$\sqrt{\mathrm{XY}} = \sqrt{\frac{l}{\omega}} \; ;$$

on a donc

$$\frac{\alpha}{\sqrt{g}} = \int \sqrt{\mathrm{XY}} \, . \, d\mathrm{H}.$$

Nous avons donc :

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{g} = \int \mathrm{X} \, d\mathrm{H} \times \int \mathrm{Y} \, d\mathrm{H} - \left[\int \sqrt{\mathrm{XY}} \, . \, d\mathrm{H}\right]^2.$$

Les limites des intégrales sont H et H' ; les fonctions X et Y sont positives ; il s'agit de démontrer que le second membre de l'équation précédente est une quantité toujours positive.

Pour démontrer ce théorème d'analyse, considérons les intégrales comme des limites de sommes et prenons d'abord les sommes ; nous aurons à calculer

$$A = \Sigma \alpha_i^2 \times \Sigma \beta_i^2 - (\Sigma \alpha_i \beta_i)^2.$$

Développons le produit et le carré ; supprimons le terme commun

$$\Sigma \alpha_i^2 \beta_i^2 ;$$

on trouve :

$$A = \Sigma \alpha_i^2 \beta_j^2 + \Sigma \alpha_j^2 \beta_i^2 - 2 \Sigma \alpha_i \beta_i \alpha_j \beta_j$$

$$A = \Sigma (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i)^2$$

quantité toujours positive. On a donc

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{g} = \lim A > 0.$$

On peut aussi démontrer ce théorème de la manière suivante :

$$B = \int X\,dH \times \int Y\,dH - \left[\int \sqrt{XY}\, dH \right]^2$$

$$\frac{dB}{dH'} = X' \int Y dH + Y' \int X dH - 2\sqrt{X'Y'} \int \sqrt{XY}\, dH$$

$$\frac{dB}{dH'} = \int \left(\sqrt{X'Y} - \sqrt{XY'} \right)^2 dH.$$

La quantité B est nulle pour H égal à H' ; sa dérivée est positive, donc B est positif pour H' plus grand que H. Il y a cependant un cas d'exception où B est constamment nul ; on reconnait facilement que c'est le cas de la section de passage dont il a été question plus haut.

169. *Formation d'un ressaut double.* — Nous avons supposé (fig. 112) une discontinuité double au point A à un certain instant t ; on peut supposer qu'elle soit réalisée par des manœuvres hydrauliques et qu'il y ait en A un barrage s'évanouissant à cet instant. Nous nous proposons d'examiner si cette discontinuité double peut

résulter d'un axe hydraulique antérieur sans l'intervention d'un barrage en A. Partons de l'instant t et faisons décroitre le temps ; nous construirons la surface hydraulique antérieure en appliquant la méthode générale ; nous imaginerons en A un niveau intermédiaire H'' et nous relierons la solution continue E'AK' aux solutions AF'C et AD'B par les solutions pseudo-conoïdes E'AF' et D'AK'. On a :

$$u''' - \psi(H''') = u - \psi(H),$$
$$u''' + \psi(H''') = u' + \psi(H') ;$$

d'où

$$\psi(H''') = \frac{u' - u}{2} + \frac{\psi(H') + \psi(H)}{2} .$$

Si l'on compare cette formule à celle qui nous a donné H'' dans le numéro précédent, nous voyons qu'on passe de l'une à l'autre en changeant le signe de la différence des vitesses ; c'est donc en faisant croitre Δu que nous ferons croitre H''' ; nous ferons comme précédemment décroitre Δu, nous trouverons des valeurs décroissantes de H''' ; on trouve facilement :

pour	$\Delta u > \alpha$,	$H''' > H'$;
»	$\Delta u = \alpha$,	$H''' = H'$;
»	$-\alpha < \Delta u < \alpha$,	$H' > H''' > H$;
»	$\Delta u = -\alpha$,	$H''' = H$;
»	$\Delta u < -\alpha$,	$H''' < H$.

On démontre comme précédemment que les deux solutions pseudo-conoïdes sont physiquement possibles lorque H''' est inférieur aux deux autres hauteurs et le sont seulement dans ce cas ; en d'autres termes, quand les solutions pseudo-conoïdes sont possibles avant l'instant t, elles ne le sont plus après cet instant et vice-versa.

Prenons d'abord le cas de la figure 112, où les solutions pseudo-conoïdes sont impossibles quand on fait décroitre le temps ; nous construirons deux lignes de discontinuité finies AM et AN. Plaçons-nous alors à l'instant t_0 antérieur à l'instant t ; nous obtiendrons un axe hydraulique MN limité par deux ressauts ; mais ce sont précisément des ressauts évanouissants (70) ; il faut donc en conclure qu'on ne peut réaliser naturellement la discontinuité double que nous avons supposée à l'instant t. On peut reconnaitre immédiatement

cette impossibilité sans recourir aux considérations que nous venons de rappeler. Plaçons-nous au point M ; on a :

$$\Delta u = \beta > \alpha,$$

les quantités β et α étant calculées pour les deux hauteurs en M ; en partant du point M, on se trouve dans le cas où les deux solutions pseudo-conoïdes sont possibles ; la discontinuité finie est instable, puisqu'il suffirait, pour la faire disparaitre, de substituer des accroissements continus très rapides aux accroissements brusques.

La discontinuité double ne sera donc réalisable naturellement que dans les cas où les deux solutions pseudo-conoïdes sont physiquement possibles avant l'instant t. On peut alors construire l'axe hydraulique à l'instant t_0 qui engendre la discontinuité double à l'instant t et cet axe ne présentera aucune discontinuité. Il faut cependant remarquer que c'est là un état initial infiniment peu probable, car l'axe hydraulique et les vitesses doivent être calculés précisément de manière à obtenir des caractéristiques qui convergent en un même point A. Nous examinerons néanmoins les différents cas qui peuvent se présenter.

On peut avoir au point A

$$\Delta u = -\alpha, \quad H'' = H', \quad H''' = H ;$$

on trouve avant l'instant t une seule solution pseudo-conoïde ; elle correspond à un foyer des caractéristiques d'aval ; elle devient impossible après l'instant t ; en la remplaçant par une seule discontinuité finie, on augmenterait la valeur absolue de la différence des vitesses, car on a

$$\Delta u = -\alpha > -\beta ;$$

on obtient donc une discontinuité finie d'aval et une solution pseudo-conoïde d'amont. Si on négligeait la différence entre α et β, on aurait seulement la discontinuité finie ; donc la solution pseudo-conoïde a peu d'étendue.

En faisant décroitre Δu, on trouve deux solutions pseudo-conoïdes avant l'instant t ; la solution pseudo-conoïde qui existe après cet instant devient de moins en moins sensible et elle disparait quand on a

$$\Delta u = \beta.$$

Si on continue à faire décroitre Δu, on obtient un ressaut double engendré par deux solutions pseudo-conoïdes.

Nous avons dit que tous ces états antérieurs à la discontinuité A sont infiniment peu probables ; en remplaçant chacune des solutions pseudo-conoïdes par plusieurs discontinuités finies, on obtient des états antérieurs tout aussi improbables ; le seul état antérieur probable est celui qui résulte de l'intersection de deux lignes de discontinuité finie. Nous l'obtiendrons en remplaçant les deux solutions pseudo-conoïdes par deux discontinuités finies, et cela exige que l'on ait

$$\Delta u < -\beta.$$

On reconnaît, comme au numéro 166, qu'il y a une certaine indétermination dans la construction de ces lignes ; il y a une infinité d'états antérieurs ; dans chacun de ces états, l'axe hydraulique, à l'instant t_0, présente une dépression limitée par deux ressauts persistants dont les lignes de propagation se coupent au point A. Après la rencontre des deux ressauts, il se produit un axe hydraulique surélevé limité par les deux ressauts. Les lignes de propagation changent de direction au moment où elles se coupent ; les nouvelles directions résultent du calcul des vitesses des deux ressauts.

Nous avons supposé H plus petit que H' ; on peut reprendre toute la discussion pour le cas où H est plus grand que H' ; la seule modification est que H''' atteint H' avant H. La discontinuité peut résulter d'un état antérieur quand on a

$$H''' \gtrless H'$$

ou bien

$$\Delta u \lessgtr -\alpha$$

$$\alpha = \psi(H) - \psi(H').$$

Le seul phénomène probable est encore l'intersection de deux lignes de discontinuité finie ; on doit avoir

$$\Delta u \lessgtr -\beta$$

$$\beta = \sqrt{g \frac{(\omega - \omega')(\omega\eta - \omega'\eta')}{\omega\omega'}}$$

Le cas de l'égalité correspond à un ressaut simple.

Enfin on peut avoir H égal à H' ; on a

$$\beta = 0.$$

La rencontre de deux ressauts a lieu quand Δu est négatif.

(A continuer.)

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION GRAPHIQUE

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

J. MASSAU

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Université de Gand.

CHAPITRE IV *(Suite)* (1).

§ 9. INFLUENCE DE LA COHÉSION.

170. ***Massifs pulvérulents.*** — Les principes que nous avons exposés dans les paragraphes précédents permettent de déterminer les pressions qui se développent dans un massif pulvérulent prismatique, quelles que soient les conditions limites. Nous pouvons nous donner à volonté la forme de la surface libre, la forme des constructions qui soutiennent les terres ou qui reposent sur elles ; nous pouvons déterminer, aussi exactement qu'on le désire, les divers états d'équilibre qui correspondent aux mouvements de la construction dans les différents sens.

Avant d'aborder les applications de notre méthode, nous reviendrons un instant sur l'hypothèse que nous avons admise, en supposant, selon l'usage, les terres dépourvues de toute cohésion. On a fait à cette hypothèse les objections suivantes : en négligeant la cohésion, dit-on, on néglige le facteur le plus important de la stabilité des terres ; dans un terrain vierge, on peut établir des fouilles limitées

(1) Voyez : tome XXII, pages 85-214 ; troisième série, tome I, pages 135-226 et pages 393-434 ; tome II, pages 383-436.

par des parois verticales de hauteur assez grande et ces parois se maintiennent pendant longtemps ; les déductions tirées de l'équilibre des massifs pulvérulents sont donc fort éloignées de la vérité. On ajoute que la preuve de l'importance du rôle de la cohésion, c'est que, sans la cohésion, on ne pourrait jamais fonder un ouvrage directement sur le bon terrain, car un bon terrain est une terre qui a assez de cohésion pour supporter le poids de la construction que l'on veut édifier.

Une première raison pour laquelle on ne tient pas compte de la cohésion, c'est qu'il n'existe aucune théorie certaine qui permet d'en déterminer l'influence. On a proposé d'ajouter au frottement sur les plans de glissement une constante égale au coefficient de résistance des terres au cisaillement. Mais c'est là un mode de calcul qu'il est difficile d'admettre, car si la terre conserve sa structure solide, il y a résistance au cisaillement mais il n'y a pas de plan de glissement, et s'il y a des plans de glissement, la cohésion n'existe plus, il n'y a plus de forces élastiques tangentielles. Une seconde raison, c'est que les forces de cohésion peuvent s'évanouir pour des motifs divers : les influences météorologiques, humidité et sécheresse, gelée et dégel peuvent briser la cohésion, et la terre fonctionne alors, à peu de chose près, comme une terre sans cohésion. Dans ce qui suit, nous allons montrer, en outre, que c'est un préjugé d'attribuer une grande importance aux forces de cohésion ; nous allons faire voir que, dans les grandes constructions, le rôle de ces forces est à peu près nul et que c'est avec raison qu'on les néglige dans les calculs.

171. *Cohésion de capillarité.* — On peut verser du sable parfaitement sec et en former un tas limité par une surface présentant les inclinaisons du talus naturel. Si l'on ajoute une petite quantité d'eau, le sable devenu humide se comporte bien différemment ; il acquiert une certaine plasticité et, en petite masse, il peut prendre les formes les plus diverses. Il semble que cette cohésion est produite par la capillarité. Il est évident que les forces de cohésion de cette nature sont très petites et n'exercent d'influence que sur l'équilibre de masses très réduites.

172. *Cohésion de solidité.* — La terre non remuée présente une cohésion d'une autre nature ; on peut la considérer comme un solide pouvant développer des forces élastiques appréciables. Il y a des terres dont la dureté peut se rapprocher de celle de la roche, mais ce ne sont pas celles-là dont nous étudions la stabilité. Nous ne considérons que les terres ordinaires qui constituent un solide dont les coefficients de résistance sont excessivement faibles, quand on les compare aux coefficients de résistance des matériaux pierreux.

173. *Principe de similitude.* — Nous avons démontré (102) qu'étant donné un massif pulvérulent en équilibre, on peut construire un massif géométriquement semblable qui sera également en équilibre. Ce théorème n'est plus vrai quand on tient compte de la cohésion et l'on doit le remplacer par le suivant : étant donné un massif de terre qui ne peut être en équilibre que par l'intervention des forces de cohésion, un massif géométriquement semblable est condamné à périr par rupture immédiate, si les dimensions sont augmentées dans un rapport suffisamment grand.

En effet, étant donné un massif en équilibre, on peut toujours construire un massif géométriquement semblable; et ce dernier sera également en équilibre si les forces élastiques varient dans le rapport de similitude. Cette propriété résulte immédiatement de la forme des équations de l'élasticité. Soient A et B deux massifs géométriquement semblables ; les divers états d'équilibre de A et de B se correspondent, car à tout état d'équilibre de A correspond un état d'équilibre de B, et réciproquement ; il en résulte que les états d'équilibre où le travail de la cohésion est le plus petit possible, se correspondent également. Or, en passant de A en B, la force de cohésion augmente dans le rapport de similitude ; si l'on augmente ce rapport, il arrivera un moment où les coefficients de rupture seront dépassés et l'équilibre sera rompu.

Il résulte de ce théorème que si les forces de cohésion peuvent exercer une certaine influence dans les petites masses, elles deviennent négligeables dans les grandes constructions. Ainsi, par exemple, on peut donner les formes les plus diverses à une petite masse de sable humide ; un grand remblai en sable humide doit être établi suivant le talus naturel. On peut couper verticalement une terre vierge, si la hauteur de la paroi ne dépasse pas une certaine limite ; si la hauteur augmente, il y a éboulement.

174. *Mur de soutènement.* — Nous supposons que l'on coupe verticalement une terre vierge, que la hauteur de la paroi dépasse la limite dont il vient d'être question et que l'on construit un mur de soutènement sans diminuer la cohésion des terres. On peut se proposer de calculer la pression que le mur doit exercer sur la paroi pour empêcher la rupture de la cohésion du massif. C'est là un calcul bien difficile à faire exactement ; mais nous simplifierons la question en supposant que les axes principaux de la déformation de la terre en un point de la paroi soient dirigés suivant la verticale oz, suivant la perpendiculaire ox au mur, et suivant un axe oy perpendiculaire aux deux autres.

Les pressions principales parallèles aux axes des x et des z sont unies aux dilatations principales par les formules connues :

$$p_x = -\mu\,(3\,\delta_x + \delta_y + \delta_z),$$

$$p_y = -\mu\,(\delta_x + \delta_y + 3\,\delta_z).$$

Nous transformerons ces deux équations en remarquant que l'équilibre dans le sens vertical donne

$$p_z = \Pi\, z,$$

l'origine des axes étant placée à la surface libre des terres ; nous remarquerons ensuite qu'il ne peut y avoir de dilatation dans le sens longitudinal et nous ferons

$$\delta_y = 0.$$

Éliminons ensuite la dilatation dans le sens des z, supprimons les indices des pressions et dilatations dans le sens des x, nous obtenons

$$\Pi z - 3\,p = 8\,\mu\,\delta.$$

La stabilité des terres, au point de vue où nous nous plaçons, exige que la dilatation ne dépasse pas une certaine limite l. Nous obtiendrons la dilatation L qui précède la rupture, en déterminant la hauteur maxima H d'une paroi verticale qui peut se soutenir d'elle-même ; il faut alors dans la formule précédente annuler la pression p du mur ; on trouve :

$$\Pi\,H = 8\,\mu\,L$$

Adoptons un certain coefficient de sécurité ; prenons par exemple

$$l = \frac{L}{5},$$

cela revient à admettre une hauteur h cinq fois plus petite que H et à écrire

$$\Pi\,h = 8\,\mu\,l.$$

La condition de stabilité des terres soutenues par un mur est alors

$$\Pi\,z - 3\,p \leqq \Pi\,h,$$

d'où l'on tire

$$p \leqslant \Pi \frac{z-h}{3}.$$

En d'autres termes, les terres conserveront leur structure solide, si le mur est calculé de manière à résister à une poussée donnée par la formule

$$p = \Pi \frac{z-h}{3};$$

sur la hauteur h, le mur est inutile.

Calculons maintenant la poussée, en supposant un massif sans cohésion ; nous supposons que l'on ne tient pas compte du frottement des terres sur le mur ; nous obtenons

$$p' = \Pi z \operatorname{tang}^2 a,$$

$$2a = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

φ étant l'inclinaison du talus naturel.

Pour un talus naturel incliné à 30 degrés sur l'horizon, on trouve précisément

$$p' = \Pi \frac{z}{3};$$

dans ce cas on aura toujours

$$p < p';$$

il y aura économie à tenir compte de la cohésion. Mais les terres qui ont une certaine cohésion ont un talus naturel plus incliné sur l'horizon ; on a presque toujours

$$\operatorname{tang}^2 a < \frac{1}{3}.$$

Alors la pression p' croit plus rapidement que p lorsque l'on fait croître z ; il arrive un moment où il est plus économique de supposer les terres sans cohésion. Nous trouverons la hauteur h', au-delà de laquelle il est préférable de négliger la cohésion, en posant

$$p' = p;$$

on trouve

$$z = h' = \frac{h}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 a}.$$

Pour un talus à 45 degrés, on trouve approximativement

$$h' = 2h.$$

Supposons que la terre puisse se soutenir d'elle-même sur une hauteur de 5 mètres ; on réduira la hauteur h à un mètre et l'on aura

$$h' = 2 \text{ mètres.}$$

On voit donc que l'influence de la cohésion n'a pas l'importance qu'on voudrait lui attribuer ; elle se réduit à diminuer la poussée sur une hauteur de 2 mètres. Il faut remarquer, en outre, que le calcul qui précède est très incertain et qu'il serait difficile d'évaluer l'importance de la cohésion par un calcul qui soit à l'abri de toute critique, tandis que la poussée des terres sans cohésion a été calculée par une formule qui donne une poussée manifestement trop grande. En tenant compte du frottement des terres sur le mur, on trouverait que l'influence de la cohésion est encore plus petite.

175. *Fondations.* — Nous avons dit qu'on attribue quelquefois à la cohésion des terres la possibilité de fonder directement un ouvrage sur le bon terrain ; c'est là, nous semble-t-il, un préjugé dont il nous sera facile de montrer l'inconséquence. Quand il s'agit d'édifier une construction importante, on détermine soigneusement les pressions que subissent les matériaux pierreux afin de constater que les limites de résistance ne sont pas dépassées. Ces matériaux pierreux, on les place alors sur le bon terrain et ce serait grâce à la cohésion que ce soit-disant bon terrain résisterait. Cependant ce bon terrain va subir les mêmes pressions que les matériaux qu'il supporte ; pour être logique — et logique jusqu'à l'absurde — on devrait envoyer des blocs de ce bon terrain dans un laboratoire de mécanique appliquée, pour les soumettre aux mêmes expériences que les pierres qui forment la base de la construction ; mais on n'en fait rien et quand on demande à un praticien à quel caractère on reconnaît le bon terrain, il répond que c'est une terre qui résiste à la pression que la main peut exercer par l'intermédiaire d'une canne. Il nous semble que si la construction est assez importante pour qu'on se préoccupe des pressions qui s'exercent sur les maçonneries, il est évident que les coefficients de résistance de la terre seront dépassés. La terre va donc s'écraser et se comporter comme un massif sans cohésion. La fondation sera stable si la profondeur de la fouille de fondation a été convenablement calculée.

Si la stabilité d'une fondation était due à la cohésion des terres, on pourrait déblayer les terres environnantes jusqu'au niveau de l'assiette des fondations ; cela reviendrait à réduire la fouille à

zéro ; une disposition semblable serait contraire à toutes les règles de la pratique.

176. *Talus.* — C'est dans la stabilité des talus que la cohésion des terres exerce le plus d'influence. On peut maintenir pendant un certain temps un talus un peu plus incliné que le talus naturel. Cela provient de ce que des forces élastiques très faibles sont suffisantes pour empêcher l'éboulement. Dans ce qui va suivre, nous étudierons la stabilité des talus en supposant une terre sans cohésion. Quand nous trouverons qu'un talus n'est pas en équilibre sous l'action de pressions supérieures, nous déterminerons la surface d'éboulement ; il est bien entendu que cette surface ne se réaliserait instantanément que si le massif était pulvérulent ; en réalité, l'éboulement ne se produira que lorsque les influences météorologiques auront désagrégé les terres et supprimé la cohésion.

§ 10. STABILITÉ DES TALUS.

177. *Massif hétérogène.* — Nous avons supposé jusqu'ici que le poids spécifique et le coefficient de frottement des terres restent constants dans toute l'étendue du massif. Dans ce cas, la seule condition d'équilibre est que l'inclinaison de la surface libre ne soit en aucun point supérieure à celle du talus naturel ; notre méthode permet alors de trouver les pressions en tous les points du massif. Il peut arriver que le massif soit hétérogène ; nous supposerons qu'on peut le subdiviser en couches homogènes par des surfaces où le poids spécifique ainsi que le coefficient de frottement peuvent subir des modifications discontinues ; il suffit alors d'étudier séparément l'équilibre de chaque couche.

Soit AD (fig. 113) la surface qui sépare deux couches ; on détermine les fonctions (p, u) pour la couche supérieure (116) ; on en déduit par l'épure circulaire (95) la pression P en un point quelconque M de la surface de discontinuité. On construit alors, s'il y a lieu, une nouvelle épure circulaire en introduisant la nouvelle valeur de l'angle du frottement, et connaissant P (98), on obtient les fonctions (p', u') au même point M pour la couche inférieure. On peut alors déterminer l'état d'équilibre

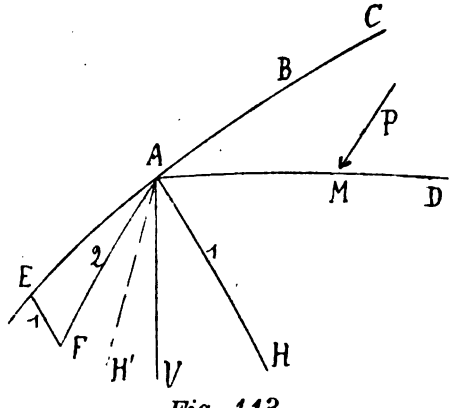

Fig. 113.

de la couche inférieure. Si le coefficient du frottement reste constant, les fonctions (p, u) sont les mêmes au point M pour les deux couches, il n'y a pas lieu de déterminer la pression P.

Pour éviter quelques multiplications, nous avons, dans les épures, représenté les pressions par les hauteurs des colonnes de terre correspondantes (118), c'est-à-dire que la ligne p que nous construisons n'est pas la pression effective, mais la hauteur.

$$p = \frac{(p)}{\Pi}$$

en mettant la pression effective entre parenthèses ; cela revient à réduire le poids spécifique à l'unité. Quelquefois, il peut être utile de modifier cette échelle de pression en réduisant le poids spécifique à un nombre simple (122, 123) ; on a alors

$$p = n \frac{(p)}{\Pi}.$$

Il convient de faire les mêmes conventions pour la couche inférieure ; la même pression sera représentée par p' et l'on aura

$$p' = n \frac{(p)}{\Pi'};$$

on en déduit

$$\frac{p'}{p} = \frac{\Pi}{\Pi'};$$

on trouve la nouvelle longueur par une quatrième proportionnelle.

Connaissant les pressions sur AD, on construit une solution limitée à gauche par la caractéristique AH du premier système; la surface libre AE commande une solution limitée à droite par une caractéristique AF du second système ; ces deux solutions seront réunies par une solution pseudo-conique intermédiaire construite sur les caractéristiques AH et AF ; selon la valeur de l'angle HAF, cette solution sera physiquement réalisable ou présentera deux contours apparents ; dans ce dernier cas, la solution intermédiaire vraie

s'appuiera sur les deux solutions commandées par AD et AE, au moyen de deux lignes de discontinuités finies.

Ainsi, par exemple, si la couche supérieure est plus dense, on aura sur AD des fortes pressions ; on se trouvera dans un cas analogue à celui où le talus, au-dessus de A, serait plus incliné qu'en dessous de ce point; c'est le cas de l'angle rentrant (126); la caractéristique AH se rapprochera de la verticale, l'angle HAF sera plus petit que l'angle ordinaire des caractéristiques; on trouvera d'abord une solution théorique présentant deux contours apparents, on devra les remplacer par deux discontinuités finies (167). Si, au contraire, la couche supérieure est moins dense, la caractéristique AH s'éloignera de la verticale et l'on se trouvera dans un cas analogue à celui de l'angle saillant. Si la surface libre présente en A un angle rentrant ou saillant, s'il y a des discontinuités dans la densité et le coefficient de frottement, les effets de ces diverses discontinuités peuvent s'ajouter ou se neutraliser; on peut rencontrer des cas très variés.

Il peut arriver que la caractéristique AH dépasse la verticale AV et vienne se placer en AH'. Cela ne se présente jamais dans les massifs homogènes ; dans ce dernier cas, la caractéristique AH devient verticale si le talus AB a l'inclinaison du talus naturel ; pour toute autre inclinaison, on obtient une caractéristique AH qui tombe à droite de la verticale. Mais si la couche supérieure est plus dense que la couche inférieure, la caractéristique peut dépasser la verticale; nous en trouverons des exemples plus loin. Dans ce cas, l'équilibre des terres sera rompu, même si l'on donne au talus AE l'inclinaison du talus naturel ; on peut se proposer alors de déterminer la forme de la surface d'éboulement qui réalise l'équilibre strict avec le minimun de terre ; on peut aussi chercher les pressions dans le cas où le profil passe au-dessus de la surface d'éboulement et présente un excès de stabilité.

178. *Plan d'éboulement.* — Etudions d'abord les phénomènes qui se passent autour du point A en prenant la limite relative d'un massif infiniment petit ; la ligne du terrain et la ligne de discontinuité deviennent les droites AB et AD de la figure 114 ; toutes les solutions deviennent des solutions coniques ayant A comme sommet. Nous déterminons, comme nous l'avons indiqué plus haut, les fonctions (p, u) pour un point D de la couche inférieure, et nous construisons la solution conique qui doit exister sous la droite AD. Nous supposons que cette solution conique est une solution de seconde espèce à forte pression ; les caractéristiques sont concaves vers le sommet ; nous supposons, en outre, que la caractéristique d'arrêt qui

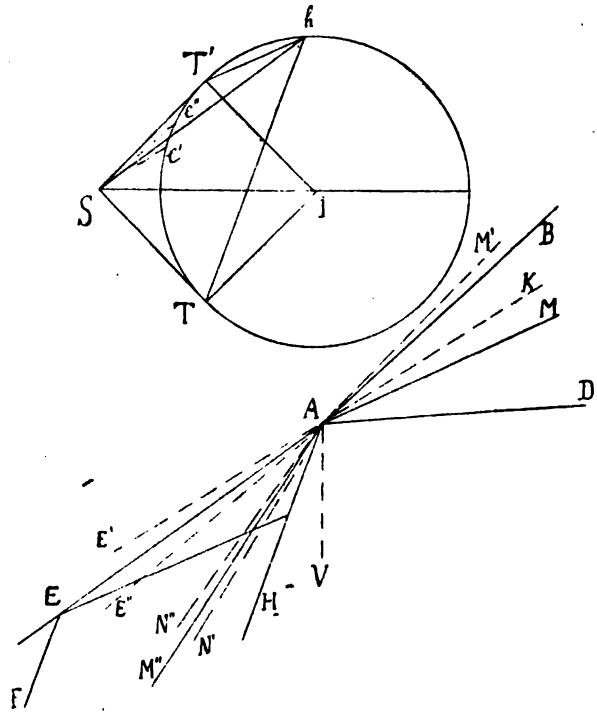

Fig. 114.

limite cette solution à gauche dépasse la verticale et se trouve en AH. Il s'agit de construire sur cette caractéristique un massif HAE en équilibre.

Menons dans l'épure circulaire la droite T*h* parallèle à AH ; traçons la droite AE parallèle à S*h*. Le massif HAE sera en équilibre si nous supposons la butée des terres dans ce massif, car on trouve une solution linéaire ayant AH comme caractéristique du premier système. On peut considérer comme évident que si l'on adoptait un talus AE″ plus incliné que AE, la butée du massif HAE″ serait insuffisante pour assurer l'équilibre ; effectivement, on trouve alors que la caractéristique commandée par AE″ fait avec AH un certain angle et l'on ne parvient pas à réunir ces deux caractéristiques de même système. Si, au contraire, on adopte un talus moins incliné AE′, il y aura excès de stabilité et l'on prévoit qu'on pourra admettre la poussée des terres sous le talus. Le plan AE est le plan d'éboulement.

Nous pouvons confirmer ces inductions par les raisonnements suivants. Cherchons dans quel cas on peut relier la caractéristique AH, par une solution conique théorique, à la solution linéaire que l'on obtient en supposant la poussée des terres sous un talus plan tel que AE′. Dans ce but, considérons toutes les solutions coniques que l'on peut construire sur AH et cherchons les diverses positions de la caractéristique d'arrêt du second système. Ces solu-

tions coniques dépendent d'une constante arbitraire que nous avons désignée par C (138). En donnant à cette constante une valeur égale à l'infini négatif, on trouve la solution linéaire HAM ; en faisant croître la constante, on trouve une solution à forte pression à caractéristiques concaves vers le sommet, et la caractéristique d'arrêt décrit l'angle MAM', AM' étant le talus naturel. En continuant à faire décroître la valeur absolue de la constante négative, on engendre une solution à trois nappes; la caractéristique AM' se transforme en deux contours apparents et une caractéristique ; la caractéristique décrit ensuite l'angle M'AM''. On obtient la limite AM'' en supposant que la constante négative converge vers zéro ; la nappe située à droite de AH se réduit à zéro et les deux autres nappes deviennent les deux solutions linéaires que l'on peut construire sous le talus plan AE. On obtient cette même solution linéaire en donnant à la constante une valeur infinie positive; en faisant décroître la constante jusqu'à zéro, la caractéristique d'arrêt de seconde espèce décrit une seconde fois l'angle M''AM. Si on se donne un talus AE' moins incliné que le talus AE, on trouvera une solution linéaire limitée à une caractéristique AN' menée dans l'angle que décrit la caractéristique d'arrêt des solutions coniques construites sur AH ; il y a donc possibilité de construire une solution théorique sur les caractéristiques AN' et AH de systèmes opposés; on cherchera une solution réalisable en remplaçant les contours apparents par des discontinuités finies. Si, au contraire, on se donne un talus AE'' plus incliné que le talus AE, on trouve une solution linéaire limitée à une caractéristique AN'' qui ne peut pas être obtenue par les solutions coniques construites sur AH ; il y a impossibilité de construire une solution conique sur les caractéristiques AN'' et AH.

On peut aussi discuter le problème en considérant directement les discontinuités finies. Menons une droite de discontinuité finie, par le point A, dans la solution linéaire de poussée commandée par un talus plan AE' ; on engendre une solution conique à caractéristiques convexes. Je dis que cette solution conique peut, en général, s'appuyer sur une seconde solution linéaire par l'intermédiaire d'une ligne de discontinuité. En effet, considérons la nappe de cette solution conique comprise entre les deux contours apparents ; en menant des lignes de discontinuités près des contours apparents, les discontinuités sont presque nulles, on engendre des solutions qui diffèrent très peu de la solution primitive, mais les caractéristiques sont concaves parce qu'on change de nappe. En écartant la ligne de discontinuité de l'un des contours apparents, la concavité de ces caractéris-

tiques disparait au moment où l'on retrouve la première solution linéaire ; elle se change en convexité pour redevenir une concavité près du second contour apparent. La courbure des caractéristiques repasse donc par zéro et en ce moment, on engendre une seconde solution linéaire reliée à la première par une solution conique et deux discontinuités finies. En menant une ligne de discontinuité faisant un angle très petit avec le talus AE', on obtient une solution linéaire qui diffère peu de la butée commandée par la droite E'AK ; en menant une ligne de discontinuité près de la caractéristique AN', on engendre une solution qui diffère peu de la poussée commandée par la même droite E'AK. En faisant tourner la ligne de discontinuité de AE' à AN', on relie la solution de poussée commandée par AE' avec une solution linéaire commandée par une droite décrivant d'abord l'angle KAM' puis l'angle M'AK ; cela résulte de ce que la butée ne peut se changer en poussée avec continuité que pour le talus naturel. Proposons-nous de relier la solution DAH et la solution N'AE' ; nous pouvons considérer la solution DAH comme linéaire dans les environs de la droite AH ; elle correspond à un talus qui est le prolongement de EA ; ce prolongement tombe dans l'angle KAM', donc la solution DAH peut être reliée à la solution N'E'A. Si nous prenons le talus AE'', plus incliné que le talus AE, on trouve, en suivant le même raisonnement, que la solution DAH ne peut être reliée à la solution commandée par AE''.

179. *Surface d'éboulement.* — Reprenons le cas général et soit AHK (fig. 115) la caractéristique curviligne qui limite à gauche la solution commandée par les pressions qui se développent sur la surface AD de séparation des deux couches ; nous supposons que cette caractéristique dépasse la verticale AV. Il résulte du numéro précédent que, sous le point A, le talus naturel n'est pas en équilibre et qu'il se produit une surface d'éboulement dont l'inclinaison en A est celle du plan d'éboulement de la solution conique. Partons d'un point H voisin de A ; menons

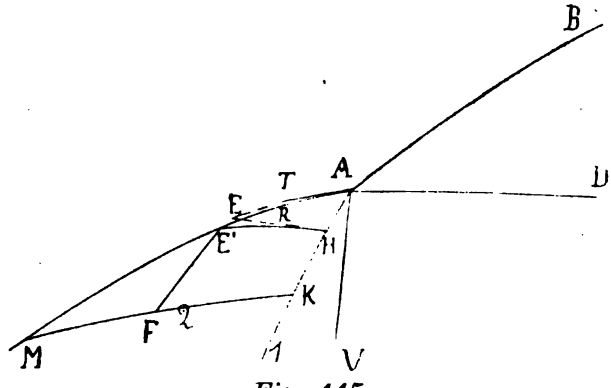

Fig. 115.

la caractéristique de seconde espèce HE ; comme première approximation, nous la supposerons rectiligne et nous trouverons facilement le point E où la pression est nulle ; c'est une fausse position d'un point de la surface libre. Nous connaissons la tangente AT à la courbe d'éboulement ; en assimilant l'arc AE à un cercle ou à une parabole, on trouve la tangente ET. L'épure circulaire donne la direction des caractéristiques au point E en prenant ET comme tangente à la surface libre ; on trouve une direction RE' pour la caractéristique du second système et l'on peut tracer plus exactement cette caractéristique HRE' en la remplaçant par deux tangentes. La tangente ET devient E'T' et, s'il y a lieu, on modifie encore la direction de la tangente RE' à la caractéristique. On construit alors le quadrangle E'HKF ; de la caractéristique E'F, on déduit l'arc EM de la courbe d'éboulement, et ainsi de suite.

Le problème que nous venons de résoudre suscite quelques réflexions. Nous venons de construire une solution déterminée par une seule caractéristique AK ; il faut ajouter cependant que cette solution est située du côté où ne se trouve pas la caractéristique de système opposé passant par A, et ensuite cette solution doit être continue et limitée par une surface libre. On peut se demander quelle est la solution que l'on obtiendrait si on se donnait arbitrairement la caractéristique KM ; puisqu'on peut construire KM quand il y a une surface libre, il faut en conclure qu'en prenant KM arbitrairement, on ne trouvera pas une surface libre mais un contour apparent ; c'est en effet ce qui se produit dans les solutions coniques.

La surface d'éboulement réalise l'équilibre strict ; le massif KAM est dans l'état d'équilibre limite qui correspond à la butée des terres. Si, en dessous de A, on établit une surface moins inclinée que la surface d'éboulement, il y a excès de stabilité ; on peut admettre la poussée des terres sous cette surface, mais il se produit deux lignes de discontinuités. On détermine les tangentes à ces lignes par la solution conique ; on trace les lignes de propagation par la méthode indiquée précédemment (165).

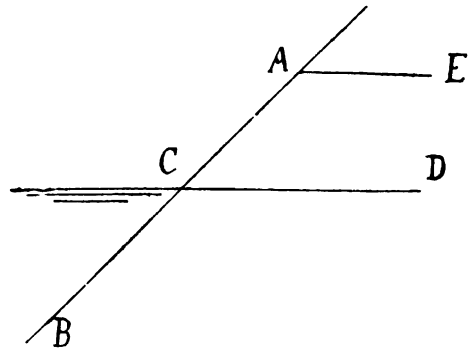

Fig. 116.

180. *Influence de l'eau sur un talus.* — Considérons le talus AB d'un canal ; supposons le terrain perméable ; il se produit une couche aquifère limitée par le niveau du canal prolongé. Nous supposerons l'eau de cette couche aquifère en repos absolu, c'est-à-dire qu'il n'y a écoulement ni du canal vers les terres, ni

des terres vers le canal. Les pressions hydrostatiques du liquide sont alors les mêmes dans la couche aquifère que dans le canal, et dans l'évaluation des pressions mutuelles des particules terreuses, il faut diminuer le poids de ces particules du poids du liquide déplacé. Soit Π le poids spécifique des terres ; en dessous du niveau de l'eau CD, nous devons attribuer aux terres un poids spécifique sensiblement égal à

$$\Pi' = \Pi - 1000.$$

Le problème à résoudre est donc le même que s'il y avait une surface CD de discontinuité relative au poids spécifique des terres.

Nous supposerons successivement que le talus CA est indéfini vers le haut, qu'il a l'inclinaison du talus naturel ou une inclinaison moindre, puis enfin que ce talus est limité par un plan horizontal AE. Nous déterminerons le plan ou la surface d'éboulement dans chacun de ces cas ; nous admettrons :

$$\Pi = 1700,$$

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{1700}{700}.$$

181. *Plan d'éboulement sous un talus naturel indéfini.* — Soient (fig. 117) KS le niveau de l'eau, ST le talus naturel supposé indéfini dans le sens de la hauteur. Il s'agit de déterminer le plan d'éboulement SM, en supposant que le coefficient de frottement des terres ne soient pas influencé par l'eau. Au point A, menons une caractéristique du premier système AV jusqu'à la rencontre du talus naturel ; soit VH la direction de l'autre talus naturel ; on trouve en A la pression

$$p = \mathrm{AH}.$$

Pour ramener le nouveau poids spécifique à l'unité, nous représenterons cette pression par la longueur

$$p' = p\,\frac{\Pi}{\Pi'} = \mathrm{R}a.$$

On trouve cette longueur par une quatrième proportionnelle ; la construction est indiquée sur la figure.

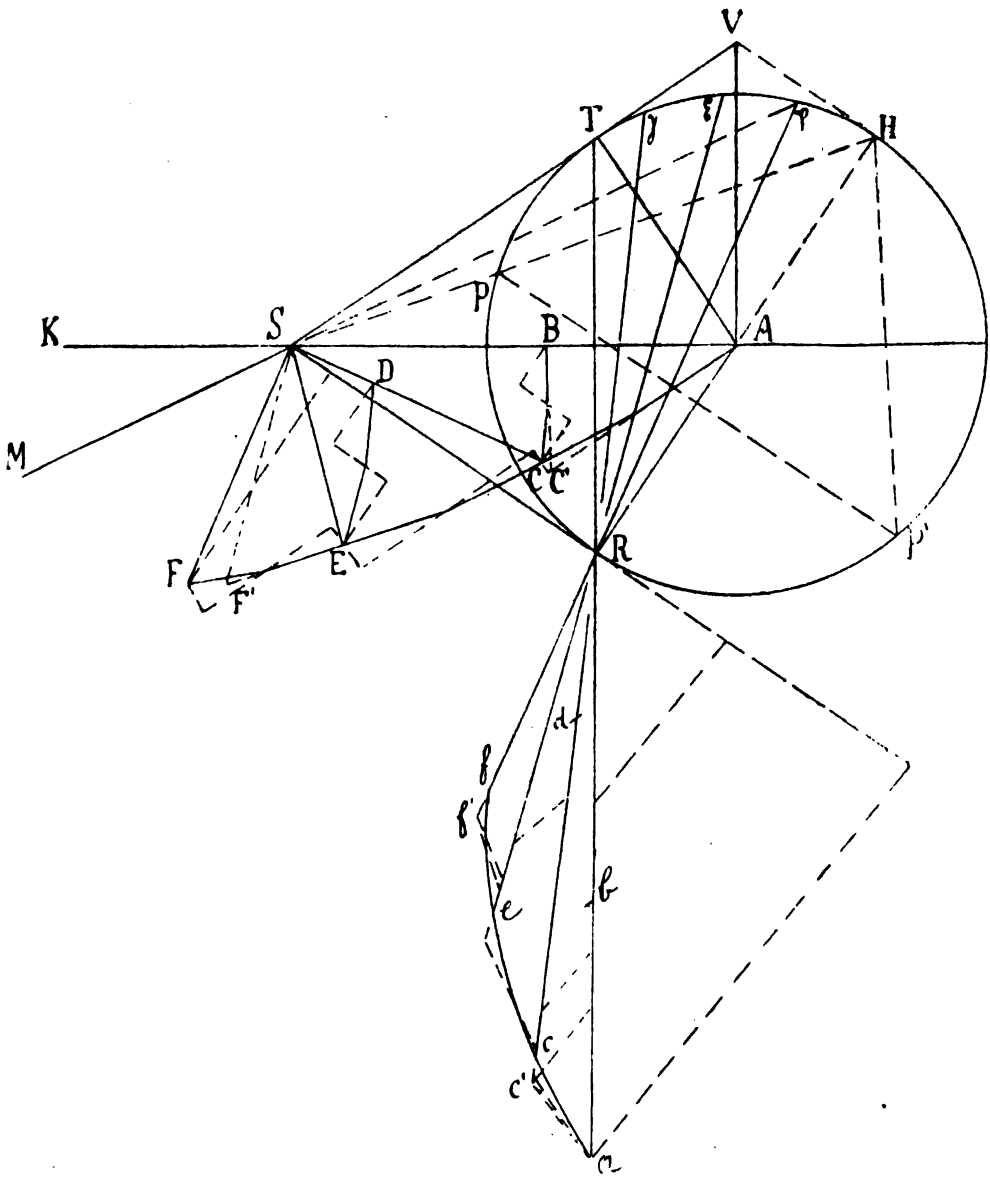

Fig. 117.

Nous connaissons les pressions le long de SA ; ces pressions sont évidemment plus fortes que dans la solution linéaire que l'on obtiendrait en admettant le nouveau poids spécifique au-dessus de SA ; on

obtiendra donc une solution à fortes pressions; comme elle est de deuxième espèce, les caractéristiques seront concaves vers le sommet et la solution sera limitée à gauche par une caractéristique d'arrêt telle que SF.

On peut suivre toutes les opérations graphiques sur la figure. De la pression en A, on déduit la pression Rb en B ; on a :

$$\frac{Rb}{Ra} = \frac{SB}{SA}.$$

Menons les caractéristiques AC' et BC' ; comme première approximation, nous les supposons rectilignes (117) ; le pôle des facettes est le point T ; la caractéristique du premier système est parallèle à TR ; la caractéristique du second système est parallèle à TS. En suivant AC', qui est parallèle au second talus naturel, la pression p ne change pas ; mais pour tenir compte du changement de l'angle u, on doit mener la droite ac' qui fait avec le rayon Ra un angle ω donné par l'équation

$$\operatorname{cotg} \omega = 2 \operatorname{tang} \varphi.$$

En menant le diamètre RH de l'épure circulaire, on trouve

$$\omega = RHP = RHP'.$$

La droite ac' est parallèle à TP'.

En suivant BC', la pression augmente de la projection de BC' sur une perpendiculaire au premier talus naturel SR ; on porte cette augmentation à partir du point b, et par le point obtenu, on mène une parallèle à TP. On trouve ainsi au point C' les valeurs (p, u) représentées par Rc' ; le pôle des facettes devient γ. Nous pouvons alors tracer plus exactement les caractéristiques AC et BC ; on trouve alors, par la méthode connue (118), le point c de l'épure des pressions. Les arcs de spirale peuvent être remplacés par deux tangentes égales ou par leurs cordes ; les directions de ces cordes s'obtiennent approximativement en joignant les points fixes P et P' au milieu de l'arc Tγ. On reconnaît que la première approximation donne l'angle u avec une exactitude suffisante ; la seconde approximation corrige seulement la pression qui passe de Rc' à Rc ; les opérations graphiques se font très régulièrement et sans tâtonnement ; il en est toujours ainsi quand on prend des arcs assez petits.

L'arc CE se détermine comme le précédent ; on voit que l'angle SED devient assez petit ; cela indique qu'on se trouve près de la

caractéristique d'arrêt SF. Pour déterminer l'arc EF qui aboutit à cette caractéristique, on prend comme première approximation la droite EF' qui donne SF' comme caractéristique du premier

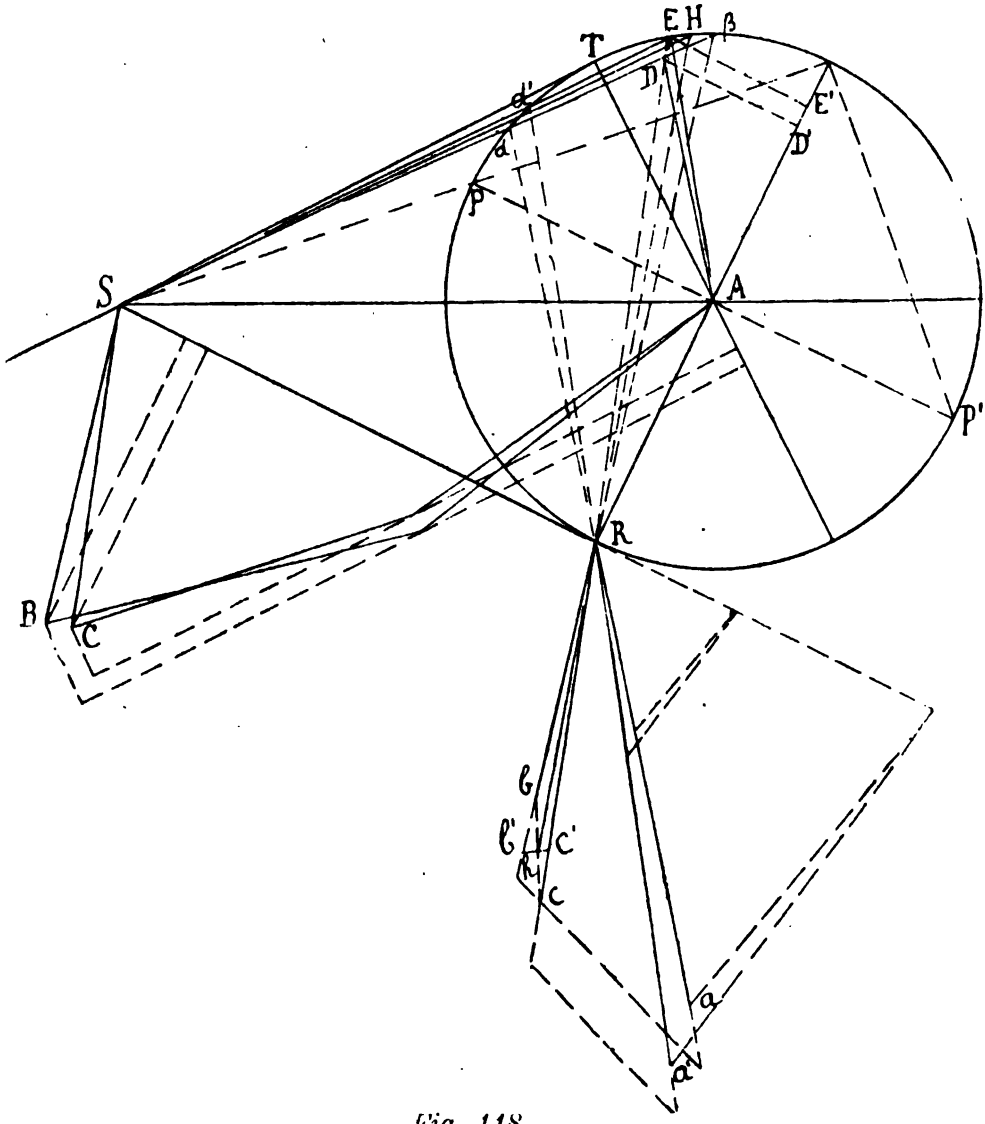

Fig. 118.

système; on trouve le point f' par la construction ordinaire ; la seconde approximation donne SF et Rf. La caractéristique SF correspond au pôle φ ; on obtient le plan d'éboulement en prolongeant la droite Sφ en SM.

On est assez étonné de voir que l'influence de l'eau est si grande; pour un talus naturel à 6 quarts, nous avons obtenu un plan d'éboulement à 8.4 quarts. En prenant un talus naturel à 8 quarts, on trouve un plan d'éboulement à 16 quarts environ. Il convient de remarquer que nous avons attribué aux terres un poids spécifique assez faible, ce qui augmente l'influence de la perte de poids; en outre, nous avons supposé le talus naturel indéfini en hauteur, ce qui est un cas théorique.

182. *Talus plan.* — En prenant le talus naturel au-dessus du niveau de l'eau, on obtient un plan d'éboulement faisant un angle rentrant avec le talus naturel. En prenant un talus moins incliné au-dessus de l'eau, on trouve que le plan d'éboulement devient de plus en plus incliné et finit par se confondre avec le talus naturel ; on obtient alors un angle saillant. Ce résultat est facile à prévoir ; en diminuant l'inclinaison du talus supérieur, on diminue les pressions sur la surface de la couche aquifère, la courbure des caractéristiques du second système diminue, la caractéristique d'arrêt se rapproche de la verticale. Puisqu'on obtient d'abord un angle rentrant, puis un angle saillant, il existe une inclinaison pour laquelle le plan d'éboulement est le prolongement du plan du talus supérieur ; c'est ce talus plan en équilibre que nous nous proposons de chercher.

Soit (fig. 118) ST le talus naturel ; donnons-nous un talus moins incliné SD. Au-dessus de l'eau, le pôle de l'épure circulaire est α ; nous construisons comme précédemment une solution conique AB, et si le talus est bien choisi, nous obtiendrons une caractéristique d'arrêt SB faisant partie de la solution linéaire de butée qui correspond au talus DS prolongé vers le bas, c'est-à-dire que SB sera parallèle à Rβ. Admettons, comme approximation, que l'on peut remplacer l'arc AB par deux tangentes égales; nous connaissons SB; les directions des tangentes aux extrémités de l'arc AB sont données par l'épure circulaire ; nous pouvons donc tracer les deux tangentes dont il s'agit et trouver la pression en B en partant du point A ; on trouve

$$p = Rb.$$

Mais on peut aussi trouver cette pression en suivant la caractéristique SB; on trouve alors

$$p = Rb'.$$

Les pressions ne sont pas les mêmes; donc b et b' sont les fausses positions d'un même point.

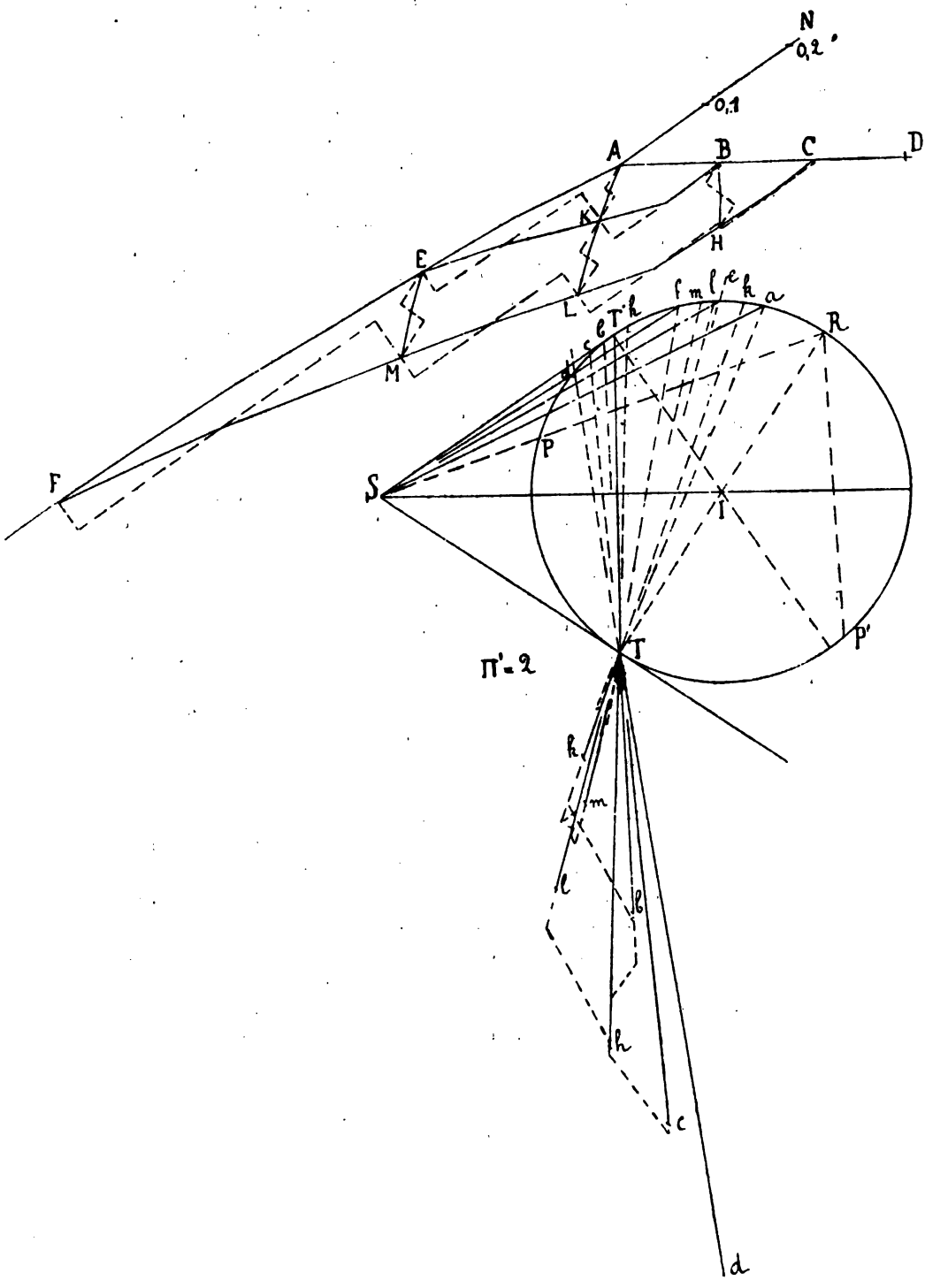

Fig. 119.

Prenons alors un talus SE ; nous obtiendrons de la même manière deux fausses positions du même point cherché. Si le talus tourne de SD à SE, le point *b* viendra en *c* en décrivant un arc de courbe assez petit pour être remplacé par une droite ; de même, le point *b'* décrit la droite *b'c'* ; à l'intersection de ces deux droites, on trouve le point juste *h*. Prolongeons alors *h*R jusqu'en H sur la circonférence de l'épure circulaire ; SH est l'inclinaison du talus plan en équilibre.

Nous avons admis une approximation assez grossière ; on peut dresser une épure plus exacte en divisant les arcs AB et AC en plusieurs parties. On peut, par exemple, construire un premier arc en partant du point A et du milieu de SA, trouver un second arc de la même manière et prendre un troisième arc jusqu'à la caractéristique d'arrêt. On fera la même chose pour l'arc AC et l'on amènera les fausses positions en coïncidence par la construction que nous avons indiquée plus haut.

183. *Plan horizontal, talus naturel et surface d'éboulement.* — Supposons au-dessus de l'eau un talus naturel AN (fig. 119) limité supérieurement par un plan horizontal ; ce plan horizontal n'est pas représenté, mais nous avons indiqué la longueur du talus naturel au moyen d'une échelle représentant les dixièmes de cette longueur. La première question à résoudre est de déterminer les les fonctions (*p*, *u*) sur la ligne ABC du niveau de la couche aquifère. Or, ce problème a été résolu précédemment au numéro 124 ; nous avons (fig. 78) déterminé les pressions et les pôles de l'épure circulaire en tous les points d'une coupe horizontale V'C'U. Nous avons conservé les mêmes données et le segment V'C' de la figure 78 est devenu le segment AD de la figure 119. Nous avons dû compléter la figure 78 en déterminant les pressions en des points compris entre V' et C' ; nous y sommes parvenus en prolongeant la caractéristique voisine du talus naturel et en la réduisant par similitude pour diminuer les dimensions de l'épure. Nous avons réduit le nouveau poids spécifique à deux unités, comme dans la figure 78, et nous avons obtenu aux points B, C, D (fig. 119) les fonctions (*p*, *u*) représentées, sur l'épure des pressions, par les points *b*, *c*, *d*. Les pressions sur ABCD commandent une solution pseudo-conique.

On trouve le triangle BHC par la méthode générale ; le triangle ABK se trouve aussi par cette méthode, mais il faut, au préalable, construire la tangente en A à la caractéristique AK ; on l'obtient par la solution conique, limite relative d'un massif infiniment petit autour du point A, et qui est précisément celle de la figure 117 ; la tangente cherchée est donnée par la droite SF de cette dernière figure. On trouve alors le quadrangle KBHL.

Connaissant la caractéristique AKL, on peut construire la courbe d'éboulement. La tangente en A à cette courbe est donnée par la droite SM de la figure 117. On trouve le point E et la tangente en E en appliquant la méthode exposée au numéro 179; on trouve ensuite la caractéristique EM par le quadrangle KLME; on en déduit l'arc EF de la courbe d'éboulement, et ainsi de suite.

On reconnaît que l'inclinaison de la courbe d'éboulement augmente rapidement pour se rapprocher de celle du talus naturel. On peut démontrer de la manière suivante que la tangente à l'infini est parallèle au talus naturel. Construisons un massif semblable, en prenant un rapport de similitude infiniment petit et passons à la limite; la hauteur du talus au-dessus de l'eau se réduit à zéro; la surface d'éboulement se confond alors avec le talus naturel; or, la courbe d'éboulement reste toujours semblable à elle-même, sa limite doit donc avoir la direction de la tangente à l'infini.

Le profil formé du talus naturel et de la courbe d'éboulement est le profil qui satisfait strictement aux conditions de l'équilibre limite; en partant de la crête du talus N, ce profil prend en chaque point la plus grande inclinaison compatible avec l'équilibre. Si l'on part de cette crête N avec une inclinaison moindre, il est naturel de penser que l'on trouvera un profil d'équilibre qui sera tout entier au-dessus du profil strictement suffisant; on peut partir de N avec le talus qui donne le talus naturel comme plan d'éboulement; ce talus naturel sera tout entier au-dessus de la courbe d'éboulement; cela tend à démontrer que cette courbe a une asymptote.

Lorsqu'on se propose d'établir un talus en équilibre malgré l'influence de l'eau, il est peu pratique d'établir ce talus suivant le profil de la courbe d'éboulement. Ce qu'il y a de plus simple est de construire un talus plan dont on déterminera l'inclinaison par la méthode du numéro précédent. On peut aussi conserver le talus naturel au-dessus de l'eau et remplacer la courbe d'éboulement par un segment horizontal au niveau de l'eau suivi d'un second talus naturel. Pour déterminer les pressions sous ce profil polygonal, on suppose la poussée des terres sous le segment horizontal; on est amené à tracer deux lignes de discontinuité finie; si le segment horizontal était très petit, l'une de ces lignes atteindrait le talus naturel et il se formerait une nouvelle courbe d'éboulement.

184. *Variation du coefficient de frottement.* — Il arrive souvent que la présence de l'eau a pour effet de diminuer le coefficient de frottement; on doit alors chercher la pression P sur le plan qui limite supérieurement la couche aquifère, en utilisant la première épure circulaire; on détermine ensuite les fonctions (p', w')

qui correspondent à la même pression P, en tenant compte du nouveau coefficient de frottement dans une seconde épure circulaire. Les opérations graphiques ne subissent aucune autre modification.

185. *Couche aquifère inclinée.* — Il arrive que la couche aquifère a un certain débit ; la surface supérieure de la couche présente alors une pente d'écoulement. Soit (fig. 120) AD la ligne de plus grande pente de la surface supérieure de la couche ; nous la supposons dans le plan de symétrie du massif de terre dont nous étudions l'équilibre. Nous pouvons admettre que les pressions du liquide suivent la loi hydrostatique le long de chaque verticale ; réduisons le poids spécifique du liquide à l'unité ; la pression en un point (x, y) est donnée par la formule

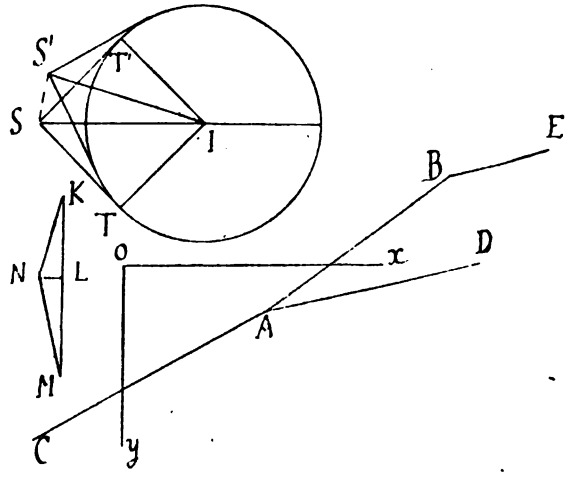

Fig. 220.

$$p = (y + x \operatorname{tang} \alpha - b) ;$$

nous supposons que la droite AD a pour équation

$$y + x \operatorname{tang} \alpha - b = 0.$$

Les pressions sur la surface qui limite un volume infiniment petit donnent alors une poussée par unité de volume dont les composantes sont :

$$Y = \frac{dp}{dy} = 1,$$

$$X = \frac{dp}{dx} = \operatorname{tang} \alpha.$$

La composante verticale est la perte de poids due au volume du liquide déplacé ; la poussée totale est perpendiculaire au niveau de la couche.

Portons sur une verticale

$$KM = \Pi,$$

poids spécifique des terres ; portons ensuite vers le haut

$$ML = 1 \text{ tonne},$$

poids spécifique du liquide ; menons MN perpendiculairement à la ligne AD jusqu'à la rencontre de l'horizontale du point L ; on aura

$$KN = \Pi'.$$

Les pressions mutuelles des particules terreuses seront donc les mêmes que si le poids spécifique des terres était devenu Π' ; les choses se passent comme si la direction de la verticale était changée.

Les méthodes précédentes peuvent facilement s'appliquer à l'étude du massif que nous considérons. On calcule les pressions sur la ligne AD ; au-dessous de cette ligne, on change les directions de la verticale et des deux talus naturels, on réduit le nouveau poids spécifique à l'unité et les opérations graphiques ne subissent aucune autre modification.

Lorsque, en creusant une tranchée, on rencontre une couche aquifère inclinée, il se produit un axe hydraulique d'abaissement vers la tranchée. On peut encore admettre la loi hydrostatique des pressions suivant chaque verticale ; mais alors la direction MN, qui est perpendiculaire à la surface de la couche, varie d'une verticale à l'autre ; il n'est plus possible de ramener à l'unité le poids spécifique Π' qui varie incessamment. On continue toujours à remplacer les petits arcs de caractéristiques par deux tangentes égales ; le long d'une de ces tangentes, l'accroissement de pression s'exprime par

$$\Pi' \, \partial y_1 \qquad \text{ou} \qquad \Pi' \, \partial y_2 \, ;$$

on prendra la valeur moyenne de Π' et les directions moyennes des deux talus naturels pour évaluer ces produits ; les opérations deviennent plus longues mais ne présentent pas de difficultés.

Lorsque la pente de la couche aquifère devient un peu grande, on trouve des surfaces d'éboulement très peu inclinées et se rapprochant du plan horizontal ; il devient impossible d'établir une tranchée. Il est alors indispensable de se débarrasser des eaux par des travaux de drainage.

186. *Stabilité d'un remblai de chemin de fer.* — Le profil d'un remblai de chemin de fer comprend une plate-forme horizontale et deux talus ; on donne à ces talus l'inclinaison des talus naturels

sans se préoccuper des charges considérables qui passent sur le remblai. Cependant, si le poids des locomotives croissait indéfiniment, il arriverait un moment où le remblai cèderait sous la charge et les talus s'ébouleraient. L'expérience a indiqué que ces éboulements ne se sont guère produits jusqu'aujourd'hui ; mais, comme le poids des locomotives augmente sans cesse, on peut se demander si l'on ne va pas dépasser la limite de résistance et si quelques accidents qui se sont produits dans ces derniers temps ne doivent pas être considérés comme les symptômes précurseurs d'une situation qui va devenir dangereuse.

Nous nous proposons d'étudier le mode d'éboulement d'un remblai et de déterminer la charge maxima qu'il peut supporter. Nous supposerons d'abord un remblai de hauteur infinie, chargé suivant son axe de symétrie ; nous examinerons ensuite l'influence d'une force oblique, cas qui se présente dans les remblais courbes ; enfin nous indiquerons comment on peut tenir compte de la résistance du sol sur lequel repose le remblai.

Nous n'examinerons pas les détails de la transmission de la charge par les rails, les billes et le ballast ; c'est la stabilité générale que nous voulons étudier et dans ce but nous allons simplifier le problème : nous supposerons une plaque invariable fictive couvrant la largeur en couronne et supportant la charge résultante. Cela revient à supposer que le système rail, billes et ballast, présente une résistance assez grande pour être considéré comme invariable pendant les glissements et les tassements du remblai. Il y a bien une certaine indécision dans la détermination de la largeur de la plaque fictive ; on en profitera pour se rapprocher de la situation réelle. On pourrait aussi tenir compte de l'épaisseur de la couche de ballast en introduisant le coefficient de frottement spécial au ballast, mais cela compliquerait le problème.

187. *Équilibre de la partie supérieure.* — Soient (fig. 121) AB la largeur en couronne, AC et BD les talus naturels. Nous supposons que la charge est verticale et passe par le milieu E de la plaque invariable AB. La première idée qui se présente à l'esprit est de supposer que, lors de la rupture de l'équilibre, les terres glissent sous la plaque du point E vers les talus. Le segment AE fonctionne alors comme un mur qui presserait le massif EAC, et la réaction du massif sur ce segment est la butée des terres. Nous sommes donc ramené à un problème résolu antérieurement (122) : quelle est la butée du massif EAC sur le mur AE. Le talus AC commande d'abord une solution limitée à une caractéristique AM du premier système ; cette solution est la solution linéaire, car nous supposons

le talus AC prolongé indéfiniment ; la caractéristique AM est donc une droite. Il résulte de l'hypothèse du glissement des terres sous la

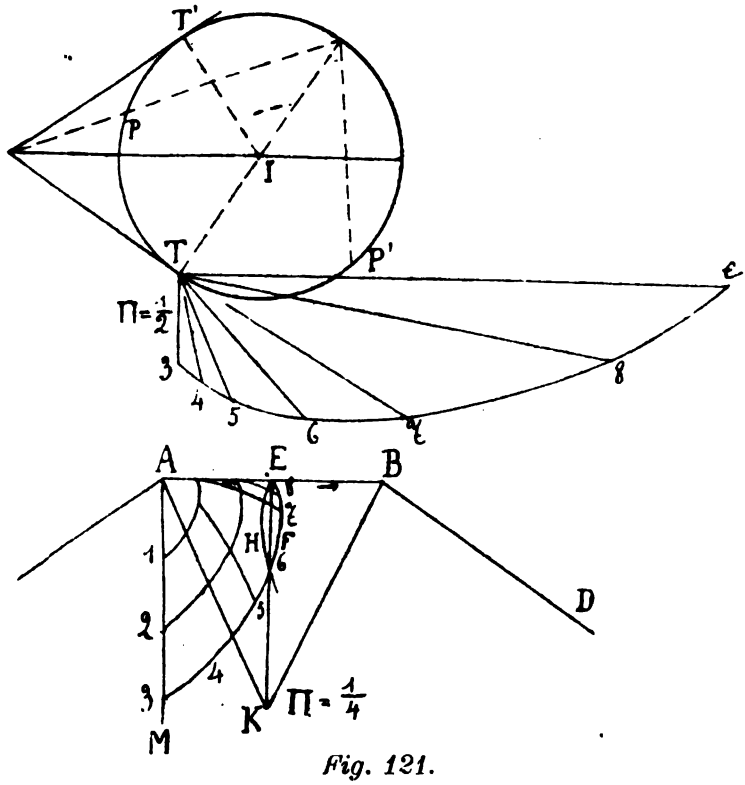

Fig. 121.

plaque, que la droite AE touche les caractéristiques du premier système et forme contour apparent. La solution déterminée par la caractéristique AM et le contour apparent AE est une solution conique que l'on construit par la méthode du n° 123. On trace dans l'angle MAE une caractéristique du second système voisine du sommet A ; on connait les directions des tangentes extrêmes, on sait que la courbure est nulle sur la caractéristique AM et infinie sur le contour apparent ; ces données suffisent pour tracer cette caractéristique d'une manière plus ou moins approchée ; nous l'avons représentée par le chiffre 1. Sur le segment 12 de la caractéristique AM et la caractéristique 1 du second système, on construit la caractéristique 2 du second système. On construit de même la caractéristique 3, 4, 5, 6, 7, 8 E ; la courbe (p, u) relative à cette caractéristique est représentée sur l'épure des pressions dont le

pôle est T ; nous l'avons indiquée par les mêmes chiffres que la caractéristique. En représentant les pressions normales sur AE, on obtient sensiblement une droite AK ; cela prouve que le problème proposé est résolu avec une exactitude suffisante.

Nous pouvons appliquer la même construction à la détermination des pressions normales sur le segment EB ; comme il y a symétrie, nous trouverons les pressions normales représentées par la droite KB. On remarquera que, dans le tracé de la courbe (p, u), nous avons représenté les pressions par la moitié des hauteurs de terre correspondantes et que nous avons adopté une échelle deux fois plus petite dans le tracé du diagramme AKB des pressions normales.

Il y a cependant, au point E, un conflit entre les deux solutions coniques. Pour relier ces deux solutions, on est amené à construire une solution intermédiaire sur les deux caractéristiques EF et EH ; ces deux caractéristiques sont de systèmes opposés, mais l'angle qu'elles forment n'a ni le sens, ni la grandeur convenable ; il y a en E une discontinuité double et la solution théorique intermédiaire comprend deux solutions pseudo-conoïdes et une solution ordinaire ; une partie du plan est recouverte par plusieurs surfaces de pression ; il faut remplacer cette solution théorique par une solution intermédiaire s'appuyant sur les solutions coniques par deux lignes de discontinuité finie. Nous verrons plus loin que ces lignes de discontinuité atteignent les talus à une certaine distance de la plaque et engendrent des surfaces d'éboulement ; il n'en est pas moins vrai que les pressions que nous venons de déterminer sont compatibles avec un état d'équilibre de la partie supérieure du remblai.

Nous avons admis un talus naturel à six quarts ; l'épure donne approximativement

$$EK = AB = l.$$

La charge maxima par mètre courant est donc donnée par la formule

$$P = 2\Pi l'.$$

Prenons, par exemple :

$$\Pi = 1700 \text{ kgs},$$

$$l = 3 \text{ mètres} ;$$

on obtient

$$P = 30.6 \text{ tonnes}.$$

Les plus fortes locomotives sont encore loin de donner une charge aussi considérable ; il est vrai que cette charge provoque l'éboulement des talus à une certaine distance de la plate-forme.

188. *Autre construction.* — La méthode que nous avons appliquée dans le numéro précédent, pour construire la solution conique EAM, est, en définitive, une méthode par approximation successive ; nous avons expliqué au numéro 123 comment il se fait que les différentes caractéristiques que l'on construit successivement, deviennent de plus en plus exactes. Nous pouvons opérer d'une autre manière. La solution conique est déterminée par deux équations différentielles ordinaires ; connaissant les valeurs initiales des fonctions inconnues, on peut construire la solution par différents procédés ; nous avons indiqué, au numéro 135, un moyen très simple de construire la caractéristique de l'un ou l'autre système ; nous avons déjà appliqué cette méthode aux numéros 181 et 182. Dans le problème que nous avons à résoudre, on ne donne pas les valeurs initiales des fonctions inconnues ; on donne les valeurs de la fonction u sur les rayons AM et AE (fig. 121) ; ces deux conditions déterminent la solution conique, mais on ne peut pas la construire directement sans tâtonnement. On doit essayer une valeur de la pression p en un point du contour apparent : on trouvera toujours une solution à forte pression, car dans la solution linéaire, AE devient une caractéristique du premier système et les pressions sont négatives. On choisit la nappe de seconde espèce dont les caractéristiques sont concaves vers le sommet. La solution cherchée est celle qui est limitée à gauche par une caractéristique verticale. Si la pression est trop faible, la courbure totale de la caractéristique du second système sera trop petite, la caractéristique d'arrêt n'atteindra pas la position verticale ; si, au contraire, la pression est trop forte, la caractéristique d'arrêt dépassera la verticale. On construit deux fausses positions et l'on obtient la solution juste par une interpolation.

Nous allons appliquer cette méthode en prenant comme valeur d'essai la valeur de la pression au point E, obtenue par la méthode précédente et que nous portons (fig. 122) en T9, en tenant compte du changement d'échelle. Nous partons du point E avec la caractéristique du second système et du point situé aux deux tiers de AE avec la caractéristique du premier système ; nous trouvons le point 2 par la méthode générale. Nous répétons cette construction et nous trouvons les points 3 et 4. Nous partons ensuite du point 4 et du milieu de A4, nous obtenons le point 5 ; nous trouvons de même les points 6 et 7. Nous obtenons le point 8 en partant de 7 et du

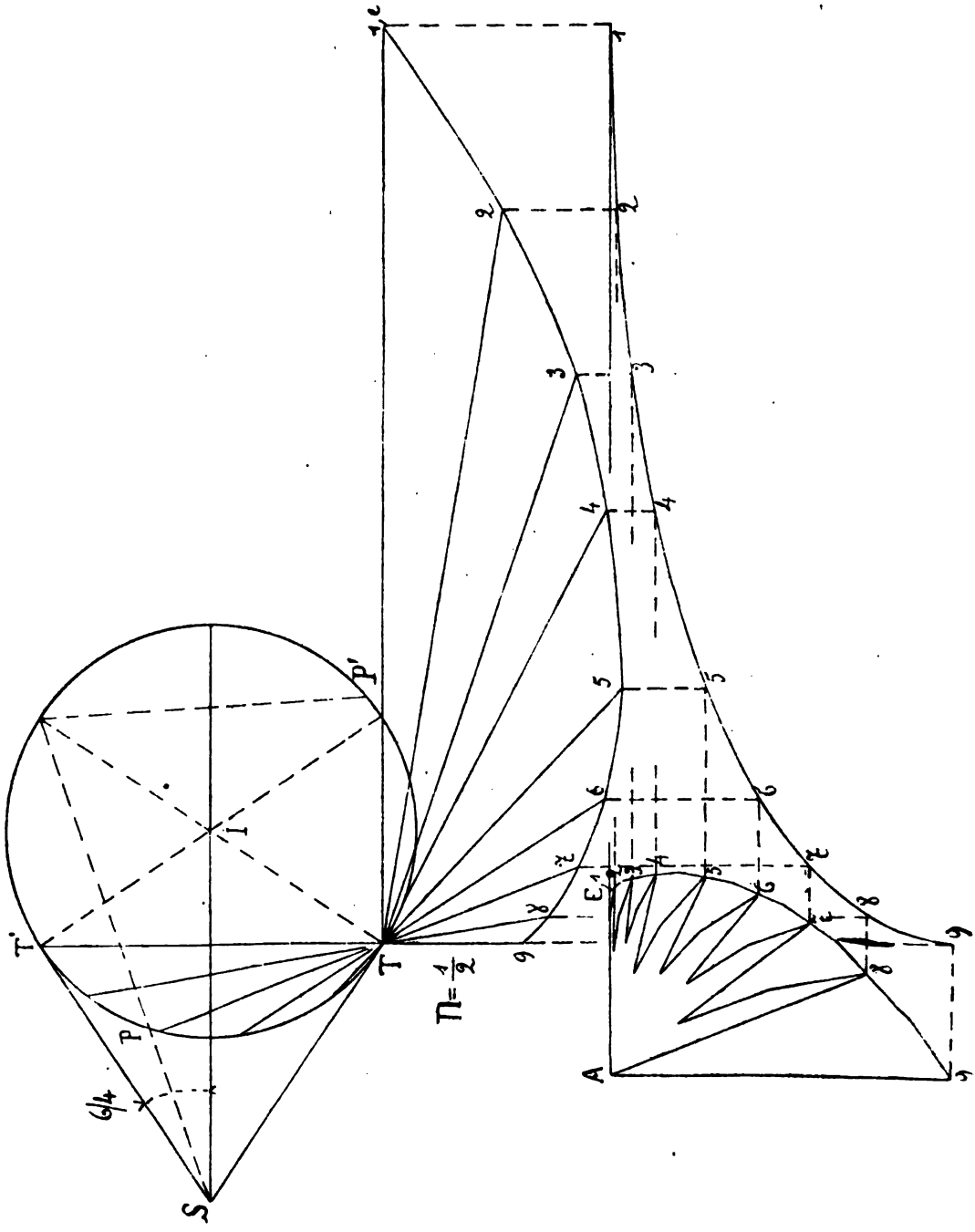

Fig. 122.

tiers de A7. Enfin nous trouvons le point 9 sur la caractéristique d'arrêt en partant des points 8 et A. Il se fait que la caractéristique d'arrêt est rigoureusement sur la verticale, de sorte que la construction du numéro précédent est aussi exacte qu'il est possible de l'exiger.

Cependant, si l'on compare la forme des deux caractéristiques du second système des figures 121 et 122, on trouve une différence assez sensible. C'est un fait que nous avons déjà constaté (123) : les erreurs commises dans la construction des caractéristiques peuvent être très apparentes sans qu'il en résulte des erreurs sensibles dans la détermination des pressions. Peut-être peut-on expliquer ce fait en remarquant que la caractéristique touche les facettes où l'angle de la pression avec la normale passe par un maximum ; dans les environs du maximum, les fonctions varient peu, donc une caractéristique grossièrement approchée peut conduire à des résultats suffisamment exacts. Peut-être aussi est-ce pour ce motif que la méthode du prisme de plus grande poussée donne assez souvent des résultats acceptables, alors qu'elle repose sur une hypothèse manifestement erronée.

Si le point 9 ne s'était pas trouvé rigoureusement sur la verticale du point A, nous aurions augmenté ou diminué la pression, nous aurions obtenu une seconde fausse position de ce point et en joignant les deux points obtenus, nous aurions trouvé la position juste sur la verticale du point A. Si, cependant, les deux fausses positions étaient trop éloignées de la position juste, il faudrait recommencer les opérations pour obtenir une exactitude suffisante.

189. *La discontinuité finie.* — Nous avons dit plus haut (187) que du milieu E de la plaque fictive partaient deux lignes de discontinuité finie. Nous allons indiquer comment on construit ces lignes. L'épure qui conduit à ce but est représentée sur la figure 123 ; nous décrirons d'abord les différentes parties de cette épure ; nous expliquerons ensuite les détails de construction.

Le demi-profil du remblai est représenté en EAC ; les deux lignes de discontinuité sont évidemment symétriques par rapport à la verticale EL. Celle de gauche est indiquée par les chiffres 1 à 11 ; on voit sous cette courbe les caractéristiques de la solution intermédiaire ; les caractéristiques du premier système partent de la ligne de discontinuité pour venir rencontrer l'axe de symétrie vers lequel elles tournent leurs concavités, elles sont indiquées par les chiffres 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12 ; les caractéristiques du second système sont indiquées par les lettres B, D, F, G, H. On voit ensuite la courbe d'éboulement CC' qui commence à l'intersection du talus et de la ligne de discontinuité.

L'épure circulaire occupe la partie supérieure de la figure ; on voit au-dessus de l'épure des pressions dont le pôle est T. La courbe X

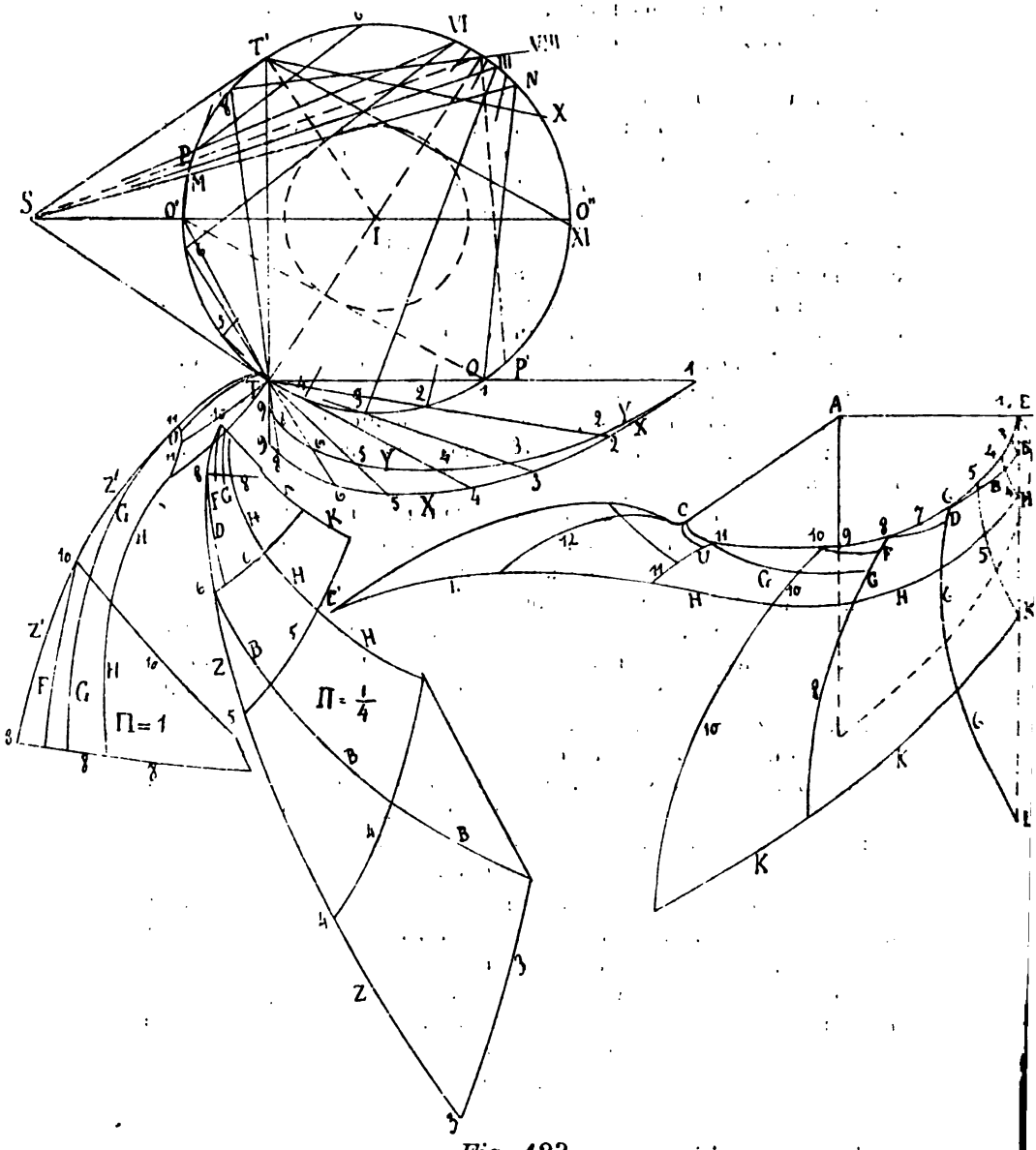

Fig. 123.

est la courbe (p, u) relative à la caractéristique du second système qui passerait par E si la solution conique n'était pas interrompue

par la discontinuité ; cette courbe (p, u) est la courbe de la figure 122, mais nous avons dû diminuer l'échelle des pressions en réduisant le poids spécifique à un quart. Un peu au-dessus de la courbe X, on voit la courbe Y ; c'est la courbe des valeurs (p, u) dans la solution conique le long de la ligne de discontinuité. On voit ensuite à gauche et au-dessous la courbe Z ; c'est la courbe des valeurs (p', u') dans la solution intermédiaire le long de cette même ligne de discontinuité. Enfin on voit à droite de la courbe Z les courbes (p, u) qui correspondent aux caractéristiques de la solution intermédiaire ; les courbes correspondantes sont indiquées par les mêmes notations ; les courbes 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, correspondent aux caractéristiques du premier système ; les courbes B, H, K, F, G, correspondent aux caractéristiques du second système. Nous avons dû représenter une partie de l'épure des pressions à une échelle quatre fois plus grande que l'ensemble.

Expliquons maintenant les différentes constructions. Le premier problème à résoudre est de déterminer, au point E, les tangentes aux lignes de discontinuité finie. Au point E de la solution conique de gauche, la caractéristique du premier système est horizontale ; le pôle des facettes est donc le point O de l'épure circulaire. Dans la solution intermédiaire, il y a un axe de symétrie EL ; on peut faire deux hypothèses : supposer que cet axe est la direction de la pression maxima ou celle de la pression minima. Je dis que c'est la première hypothèse qu'il faut choisir. En effet, si la pression minima était dirigée suivant la verticale, la pression maxima serait horizontale ; il faudrait admettre que les parties inférieures du talus fussent poussées vers l'axe par des forces étrangères. On peut confirmer cette manière de voir par un autre raisonnement. Construisons un massif semblable en prenant un rapport de similitude infiniment petit et passons à la limite. La plate-forme et sa surcharge vont se réduire à zéro ; le massif est alors compris entre deux talus naturels ; on trouve une solution conique comprise entre les deux talus qui forment deux caractéristiques de systèmes opposés ; dans cette solution, on reconnait facilement que l'axe de symétrie est la direction des pressions maxima. Il faut donc admettre qu'en s'éloignant à l'infini sur l'axe de symétrie, la pression maxima est dirigée suivant cet axe ; il doit en être de même au point E. Nous prenons donc au point E, dans la solution intermédiaire, EL comme direction de la pression maxima ; cela revient à dire que le pôle des facettes est le point O' et non le point O''. Nous trouverons alors la direction de la ligne de discontinuité par la construction connue (159) ; joignons les pôles O et O' ; traçons du centre I une circonférence qui

touche la corde OO' ; menons la tangente SMN à cette circonférence ; les droites parallèles ON et OM donnent la direction cherchée. On reconnaît que la discontinuité a une importance considérable : la pression varie dans le rapport

$$\frac{p'}{p} = \frac{SN}{SM};$$

l'angle Δu qui représente la déviation des caractéristiques est le supplément de l'angle OTO' ; c'est la moitié de l'angle mesuré par l'arc OO'. On trouve donc une solution intermédiaire à pressions très fortes et c'est ce qui explique l'éboulement des talus.

La discontinuité au point E est une discontinuité double, mais grâce à l'axe de symétrie EL, le problème à résoudre n'est pas plus difficile que s'il s'agissait d'une discontinuité simple. On peut l'énoncer comme il suit : construire une solution s'appuyant sur la solution conique par une ligne de discontinuité et admettant la droite EL comme ligne des pressions maxima. Nous construisons la ligne de discontinuité par la méthode des fausses positions. Donnons-nous arbitrairement l'arc E6 ; le rayon A6 coupe la caractéristique de la solution conique en un point où l'on connaît la pression ; elle est représentée par le rayon T6 de la courbe X ; on en déduit la pression au point 6 par une quatrième proportionnelle ; elle est représentée par le rayon T6 de la courbe Y. Le pôle des facettes est situé sur la circonférence de l'épure circulaire et sur le prolongement du rayon T6. Nous nous donnons la tangente au point 6 de la ligne de discontinuité ; en menant une parallèle à cette tangente par le pôle des facettes, on trouve la pression SVI sur la ligne de discontinuité et le nouveau pôle 6' dans la solution intermédiaire. Nous pouvons alors tracer la caractéristique B du point 6 jusqu'à l'axe de symétrie, car nous connaissons les directions des tangentes extrêmes : ce sont les droites qui joignent les pôles 6' et O' au point T'. Nous pouvons ensuite tracer la caractéristique du premier système qui coupe l'axe de symétrie sur la courbe B et la ligne de discontinuité en un certain point 3. On applique au point 3 la construction relative à la discontinuité ; on obtient les deux pôles 3 et 3'. Partant de ce point 3, nous pouvons construire les courbes (p, u) relatives aux deux arcs de caractéristiques qui joignent le point 3 au point 6 en passant par l'axe de symétrie ; on doit retrouver au point 6 la même pression p' que celle que l'on a obtenue par la discontinuité. Avant d'arriver à cette coïncidence, il faut naturellement quelques essais. Dans la solution conique, la pression p décroît assez rapidement du

point 3 au point 6 ; on doit trouver également une décroissance rapide de la pression dans la solution intermédiaire. On n'obtient pas cette décroissance en donnant à la ligne de discontinuité une faible courbure. On se rapproche du but en donnant à Δu une valeur constante, ce qui revient à donner à la ligne de discontinuité la même courbure totale qu'à la caractéristique, pour des arcs compris entre les mêmes rayons passant par le sommet ; mais les pressions décroissent trop vite dans la solution intermédiaire. On en conclut que Δu décroit assez lentement et que, dans la construction relative à la discontinuité, la droite SN tourne de SN à SVI. La fausse position consiste à se donner le point VI ou la direction 6VI de la discontinuité au point 6 ; on trouve les autres tangentes par une interpolation. Deux essais conduisent à un résultat suffisamment exact. On pourrait cependant obtenir une exactitude plus grande en partant, par exemple, du point 3 au lieu du point 6, de manière à rester dans la région voisine de E. Il faut alors dresser une épure à une plus grande échelle. On peut, par exemple, représenter les environs du point E à une échelle cinq fois plus grande ; l'épure des pressions ne sera pas changée si l'on réduit le poids spécifique à un vingtième. On reconnaît alors que l'influence du poids spécifique est insensible ; les courbes (p, u) deviennent des spirales et l'on trouve facilement la discontinuité au point 3 ; on peut alors continuer. Ayant obtenu la caractéristique B, on trace la caractéristique 4, ce qui donne un point sur B et un point sur l'axe de symétrie ; on trace la caractéristique 4 jusqu'à la rencontre de la caractéristique 6. On part d'un point de cette dernière caractéristique pour tracer la caractéristique D qui rencontre la ligne de discontinuité au point 8. On trouve la position juste de ce point 8 par deux fausses positions. On trouve de même la caractéristique F qui aboutit au point 10 ; on construit la caractéristique 10, puis la caractéristique G qui aboutit au point 11 et la caractéristique 11. Arrivé au point 11, il n'y a plus de doute possible, la ligne de discontinuité atteindra le talus.

La première idée qui se présente à l'esprit est de prolonger la ligne de discontinuité d'après la courbure de la partie obtenue ; on trouve alors une ligne faisant avec le talus CA un angle aigu. Je dis, qu'au contraire, la ligne de discontinuité doit prendre une courbure croissante et couper le talus naturel en C en se raccordant avec la caractéristique verticale. En effet, nous pouvons toujours isoler un volume infiniment petit dans les environs du point d'intersection du talus et de la ligne de discontinuité et construire la limite relative de ce volume. La ligne de discontinuité deviendra la droite CB (fig. 124) ; cette droite de discontinuité engendrera une solution à caractéristiques

convexes vers le sommet C. Cette solution n'a pas de caractéristiques passant par C ; elle est limitée à gauche par un contour apparent. Elle ne peut donc être reliée à la solution qui dépend de la courbe d'éboulement que par une ligne de discontinuité CE. Cette dernière solution devient linéaire aux limites relatives. Donc la ligne de discontinuité CE s'obtient en cherchant la seconde discontinuité qui engendre une nouvelle solution linéaire. La caractéristique du second système a la forme FBEH. Cette disposition n'est pas réalisable dans les environs du point C de la figure 123 ; les caractéristiques ne forment pas un contour apparent analogue à celui de la figure 124 ; on ne voit pas non plus comment les caractéristiques du second système pourraient aborder la discontinuité nouvelle suivant une direction HE. Il n'y a dès lors qu'une solution possible, c'est que la discontinuité s'éteigne en arrivant au talus ; il faut pour cela que la ligne de discontinuité touche une caractéristique. Si l'on essaie d'infléchir la ligne de discontinuité pour la rendre tangente au talus naturel, on n'arrive pas à trouver, dans la solution intermédiaire, un point de pression nulle sur le talus ; il faut, pour réaliser cette condition, que les caractéristiques du second système qui partent des points voisins du point 11, prennent des fortes courbures vers la droite ; alors la pression diminue rapidement et l'on peut trouver une caractéristique UC qui donne en C une pression nulle. Traçons donc la ligne de discontinuité de manière qu'elle coupe le talus en C en se raccordant avec la caractéristique verticale. Menons une caractéristique CU et construisons la courbe (p, u) qui y correspond ; en choisissant convenablement les points U et C, on trouve, dans l'épure des pressions, une courbe qui part de U pour toucher en T un rayon vertical ; c'est la variation rapide de l'angle u qui permet cette décroissance de la pression. Remarquons cependant que nous nous sommes contentés d'une approximation assez grossière ; pour obtenir plus d'exactitude, il faudrait dresser une épure à une échelle beaucoup plus grande, multiplier le nombre des caractéristiques et déterminer un certain nombre de points de la ligne de discontinuité entre les points 11 et C.

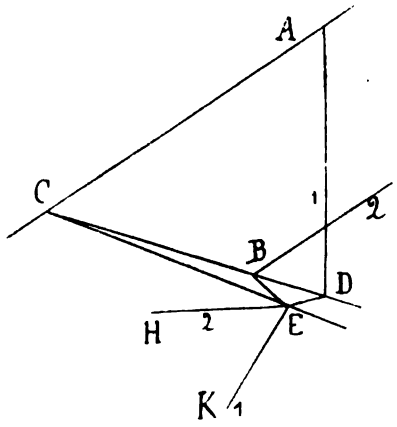

Fig. 124.

190. *Surface d'éboulement.* — Si l'on se contente d'une approximation grossière, on peut déterminer la courbe d'éboulement CC d'une manière très expéditive. En partant de la courbe 11, on peut d'abord mener les caractéristiques du second système en les supposant rectilignes ; on détermine les points où la pression est nulle ; on obtient une première ébauche de la surface libre en tenant compt du point C. Mais il faut établir entre la surface libre et la direction des caractéristiques, la relation que donne l'épure circulaire ; on infléchit les caractéristiques et on modifie la surface libre de manière à réaliser la concordance. La caractéristique qui aboutit au pour le plus haut est presque rectiligne, de sorte que ce point est déterminé avec assez d'exactitude.

Entrece point et le point C, les caractéristiques du second système prennent une courbure de plus en plus prononcée vers la droite ; les dernières tangentes à ces caractéristiques du second système prennent des directions qui varient rapidement jusqu'à la direction CA ; la courbe d'éboulement doit venir se raccorder en C avec le talus naturel, après avoir subi une inflexion. L'échelle que nous avons adoptée ne permet pas de tracer cette partie de courbe avec beaucoup d'exactitude, d'autant plus que dans la petite courbe concave vers le haut qui se trouve près du point C, il se produit certaines complications que nous allons examiner.

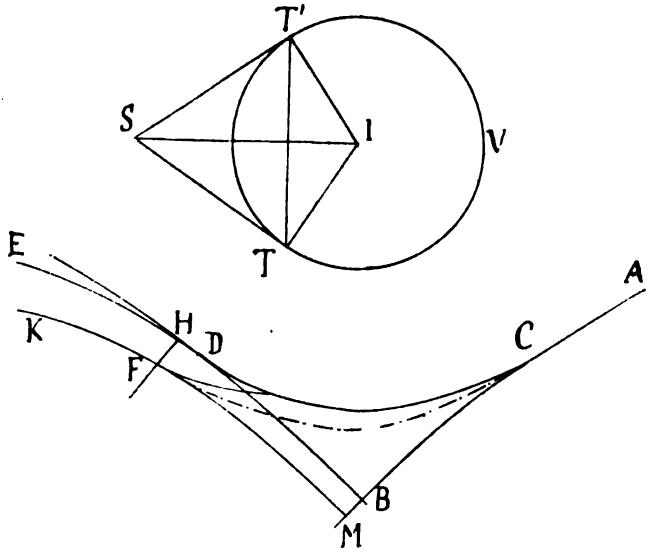

Fig. 125.

En adoptant une échelle suffisamment grande, nous pouvons construire aussi exactement que nous voulons les deux caractéristiques de systèmes opposés qui partent du point U ; ces deux caractéristiques déterminent une solution que nous pouvons construire par la méthode générale. Représentons (fig. 125), à une grande échelle, un arc CM de la caractéristique CU (fig. 123) voisin du point C ; soit MK une caractéristique du premier système partant d'un point M assez rapproché du point C pour que la tangente en M à cette caractéristique soit plus inclinée que le premier talus naturel. Suivons la caractéristique MK et appliquons l'équation

$$dp = 2p \operatorname{tang} \varphi \, du + \Pi \, dy_1 ;$$

les deux termes du second membre sont négatifs, donc la pression diminue. En continuant à nous éloigner du point M, nous trouverons d'abord une tangente ayant l'inclinaison du talus naturel, et l'on aura en ce point

$$dy_1 = 0 ;$$

nous trouverons ensuite un point où la pression passe par un minimum, quand nous aurons

$$dp = 0,$$

ou bien

$$\Pi \, dy_1 = -2p \operatorname{tang} \varphi \, du.$$

Construisons une nouvelle caractéristique du premier système, en partant d'un point B de plus en plus rapproché du point C ; la pression en B diminue jusqu'à zéro en s'approchant du point C ; on trouvera donc une caractéristique BD telle que la pression minima soit égale à zéro ; soit D le point où l'on trouve cette pression minima ; on aura en ce point

$$p = 0,$$
$$dp = 0;$$

on en déduit :

$$dy_1 = 0;$$

c'est-à-dire que la caractéristique a une tangente parallèle au premier talus naturel. Les deux caractéristiques BC et BD possèdent donc les mêmes propriétés ; les pressions sont nulles en D et en C et les tangentes en ces points sont respectivement parallèles au premier et au second talus naturel. En construisant la solution déterminée

par ces deux caractéristiques, il se peut que l'on trouve une surface libre; cette solution n'est pas impossible, mais je dis qu'elle est infiniment peu probable. En effet, connaissant la caractéristique BC et faisant abstraction de BD, on peut construire une courbe d'éboulement par la méthode ordinaire ; il est infiniment peu probable que, dans cette solution complètement déterminée par BC, on trouve précisément la caractéristique BD ; on trouvera une caractéristique touchant la courbe BD au point B, mais dont la courbure sera plus ou moins grande. Il faut donc admettre qu'en construisant la solution CBD, on trouvera un contour apparent et non une surface libre.

Le cas d'une surface libre est cependant possible, d'autant plus que les courbes BC et BD résultent d'une construction qui ne comporte pas de fonctions arbitraires ; ces courbes pourraient posséder cette propriété intéressante de dépendre d'une surface libre, mais on ne voit pas la possibilité de démontrer l'existence ou la fausseté de cette propriété. Nous examinerons les différents cas. Nous supposons d'abord que la solution CBD est limitée à une surface libre ; on trouvera cette surface libre en construisant la solution, mais il est facile de voir que du point C au point B, le pôle des facettes se déplace du point T' au point T et que la direction de la tangente à la surface libre varie de ST' à ST. Le profil de cette surface est une courbe concave vers le haut dont les tangentes extrêmes sont parallèles aux deux talus naturels. Prolongeons alors la caractéristique BD au-delà du point D en DE ; la caractéristique DE détermine une courbe d'éboulement que l'on peut construire avec autant d'exactitude que l'on veut ; nous avons vu plus haut quelle est la forme de cette courbe ; le pôle des facettes décrit l'arc TV pour revenir en T' à l'infini. On remarquera que, sous la courbe CD, on a l'état d'équilibre qui correspond à la poussée des terres, tandis qu'au-delà du point D, on a l'état d'équilibre qui correspond à la butée des terres ; au point de passage, la tangente à la courbe d'éboulement est une tangente inflexionnelle parallèle au premier talus naturel.

Reprenons maintenant le cas le plus probable, celui où la solution CBD présente un contour apparent. Nous pouvons encore réaliser les solutions déjà construites ; il suffit de couper la solution DBC par une ligne quelconque passant sous le contour apparent, et de produire artificiellement sur cette courbe les pressions qui conviennent à la solution calculée. Or, ces pressions sont excessivement petites et doivent être appliquées sur une étendue excessivement petite ; si nous les supprimons, l'équilibre sera rompu, la courbe d'éboulement sera modifiée, mais il parait évident que cette

modification sera très peu sensible et qu'on pourrait même la négliger. Nous devons cependant montrer comment on pourrait résoudre exactement le problème.

En construisant la solution CBD, nous trouvons un contour apparent qui prend naissance au point C ; nous sommes conduit à remplacer ce contour apparent par une ligne de discontinuité finie qui prend naissance également au point C. Cette ligne touchera la caractéristique du second système ou le talus naturel en C'et nous construirons une nouvelle solution satisfaisant aux deux conditions suivantes : 1° elle présente une surface libre, 2° elle s'appuie par une ligne de discontinuité sur la solution CBD qui est complètement connue. La construction de cette nouvelle solution ne présente aucune difficulté ; on trouve successivement un arc de la courbe libre et, en suivant les caractéristiques du premier système, un arc de la ligne de discontinuité. Cette ligne enlève une partie des solutions construites antérieurement pour la remplacer par une autre, mais les considérations qui précèdent font prévoir que cette solution nouvelle occupera un espace très réduit dans le cas qui nous occupe. Il est donc vraisemblable que la ligne de discontinuité restera dans le voisinage de la surface libre ; elle pourrait même se confondre avec la surface libre et l'on retrouverait le cas particulier où il n'y a ni contour apparent ni discontinuité.

Il faut évidemment dresser l'épure pour obtenir des résultats certains sur la propagation de la discontinuité. Nous nous contenterons de donner quelques prévisions. Il peut se faire, et cela parait même inévitable dans le cas qui nous occupe, que la ligne de discontinuité touche une caractéristique du premier système en un certain point F ; dans ce cas, la discontinuité s'éteint en F ; on trouve dans la nouvelle solution une caractéristique du premier système qui se raccorde à la caractéristique FK ; cette caractéristique détermine la nouvelle courbe d'éboulement. Le point F pourrait s'éloigner à l'infini ; la discontinuité s'éteindrait insensiblement. La ligne de discontinuité peut toucher la caractéristique BD au point D ; l'ancienne courbe d'éboulement subsiste alors au-delà du point D. Enfin la ligne de discontinuité pourrait atteindre la surface libre en deçà du point D ; on reconnait alors que la ligne de discontinuité se continue par un ou plusieurs ou une infinité de ricochets sur la surface libre.

On peut, comme contrôle, renverser l'énoncé du problème. On donne la surface libre qui vient d'être calculée ; on demande l'état d'équilibre. On ne retrouve pas les deux discontinuités du point C, si l'on n'ajoute pas une nouvelle condition ; cette condition, c'est que la solution linéaire est imposée sous le talus CA. Il y a alors conflit au

point C entre les deux solutions ; c'est pour résoudre ce conflit qu'il nait au point C une discontinuité double.

191. *Singularités.* — Nous avons rencontré des points tels que les points D et C de la figure 125 où la pression est nulle et où les tangentes aux caractéristiques ont l'inclinaison des talus naturels. Considérons l'un de ces points, le point D, par exemple, et étudions l'état d'équilibre dans les environs de ce point. Prenons comme axe des x le talus naturel passant par D et comme axe des y la perpendiculaire menée à cet axe par le même point D. Soient r le rayon de courbure de la caractéristique DB au point D, ε l'angle de la tangente avec l'axe des x en un point voisin ; nous considérerons ε comme une petite quantité du premier ordre et nous ne tiendrons compte, dans les calculs qui vont suivre, que des termes les plus importants. On peut mettre approximativement l'équation de la caractéristique DB sous la forme

$$y = \frac{r\,\varepsilon^2}{2} ;$$

la pression est donnée approximativement par la formule

$$p = \Pi\, y ;$$

on a, en un point de la courbe,

$$u = a + \varphi + \varepsilon.$$

Appliquons l'équation (36) du numéro 114 qui donne la variation du rayon de courbure de l'autre caractéristique ; on trouve, à l'approximation admise

$$-\frac{d\rho}{d\varepsilon} + \frac{2\rho}{\varepsilon} + \frac{2\cos\varphi}{r}\,\frac{\rho^2}{\varepsilon^2} + \frac{r}{\cos\varphi} = 0 ;$$

l'intégration donne

$$\rho = \frac{r\,\varepsilon}{4\cos\varphi}\left[1 - \sqrt{7}\,\operatorname{tang}\log C\varepsilon\right].$$

En faisant converger ε vers zéro, le rayon de courbure oscille entre les deux infinis et ces oscillations deviennent de plus en plus rapides.

Les caractéristiques présentent donc des singularités très

compliquées, impossibles à réaliser dans un état d'équilibre, à moins qu'une ligne de discontinuité à une infinité de ricochets n'enlèvent ces singularités. Remarquons qu'il y a une certaine analogie entre ces singularités et celles que nous avons constatées dans les solutions coniques lorsque la caractéristique d'arrêt fait un angle très petit avec le talus naturel de même espèce : c'est alors que l'on peut obtenir des solutions à nappes très nombreuses. Ces singularités ne se produisent pas dans le cas de la figure 125, car nous supposons que l'on a construit les caractéristiques BC et BD sans engendrer un contour apparent en dehors de l'angle CBD ; il faut donc admettre que le calcul qui précède n'est pas applicable et que le rayon de courbure r cesse d'être une quantité finie. Effectivement, ces singularités disparaissent si le rayon de courbure de la caractéristique BD s'annule en même temps que la pression. Prenons, par exemple :

$$r = m\varepsilon ;$$

on obtient :

$$y = \frac{m\varepsilon^3}{3}$$

et l'équation en ρ devient :

$$- \frac{d\rho}{d\varepsilon} + \frac{3\cos\varphi}{m} \frac{\rho^2}{\varepsilon^2} = 0 ;$$

l'intégration donne :

$$\rho = \frac{2\,m\,\varepsilon^2}{3\cos\varphi}.$$

On peut alors trouver, à droite de DB, une surface libre ; mais le profil obtenu est en réalité un contour apparent ; on trouve une solution qui correspond à la poussée des terres ; il y en a une autre qui correspond à la butée ; le profil est donc une arête saillante formant contour apparent. Si on se donne une seconde caractéristique BC, on modifie les pressions et l'arête saillante devient un contour apparent ordinaire.

192. *Equilibre limite.* — La charge que nous avons calculée au numéro 187 provoque l'éboulement des talus ; on peut demander de déterminer la charge maxima que le remblai peut supporter sans aucun éboulement.

Nous pouvons construire, sur la verticale AM (fig. 126), une infinité de solutions coniques. La plus simple est celle pour laquelle la pression est normale à la plaque. Dans ce cas, il n'y a plus de

discontinuité finie au point E; la caractéristique EMX et sa symétrique sont de systèmes opposés et déterminent une solution continue.

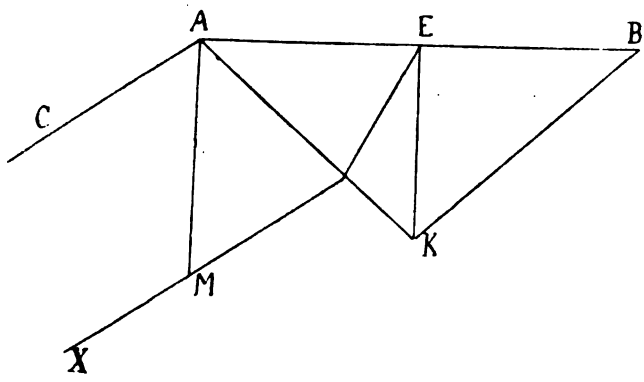

Fig. 126.

On trouve très facilement la pression en E en remplaçant l'arc ME par deux tangentes égales. Le diagramme des pressions normales est le triangle AKB. On trouve la charge :

$$P = \Pi\, 0.81\ l^2.$$

Prenons encore :

$$\Pi = 1700 \text{ kilogs},$$

$$l = 3 \text{ mètres} ;$$

on obtient :

$$P = 12.42 \text{ tonnes}.$$

Entre les deux états d'équilibre que nous avons trouvés, il y en a une infinité d'autres. On peut admettre en E une discontinuité croissant de zéro à la valeur obtenue dans la figure 123. La ligne de discontinuité variera depuis la caractéristique EMX de la figure 126 jusqu'à la ligne ÉC de la figure 123. Il y aura deux classes de solutions ; celles où la discontinuité se perd dans le remblai et celles où elle atteint le talus pour y provoquer une courbe d'éboulement ; la solution de passage est celle qui correspond à l'équilibre limite cherché. La détermination de cet équilibre limite est une opération assez longue, mais elle n'est pas nécessaire si l'on demande seulement si le remblai est en équilibre sous une charge donnée. Dans ce cas, on

construit le diagramme triangulaire des pressions normales qui correspond à la charge donnée ; on construit par tâtonnements les deux solutions coniques qui réalisent ce diagramme et l'on vérifie si la discontinuité finie se perd dans le remblai.

Il y a d'autres états d'équilibre que l'on peut examiner ; on peut abandonner le diagramme triangulaire, se donner un diagramme quelconque des pressions normales, se donner la fonction u sous la plaque ou admettre les solutions coniques jusqu'à un point quelconque de l'axe de symétrie ; mais il semble que ces solutions donnent une charge moindre que le diagramme triangulaire, et alors elles ne présentent pas d'intérêt.

193. *Charge quelconque.* — On peut se donner arbitrairement la ligne d'action de la force qui sollicite la plaque fictive, pourvu qu'elle forme avec la verticale un angle plus petit que l'angle du frottement des terres. En faisant croître la force à partir de zéro, il arrivera un moment où l'éboulement commencera ; on obtiendra un équilibre limite. Comme la ligne d'action de la force dépend de deux paramètres, il y a une infinité double d'états d'équilibre limite. Occupons-nous d'abord de l'équilibre du massif supérieur et supposons que les terres glissent sous la plaque ; divisons la largeur de la plaque en trois segments : un segment AD (fig. 127) où la pression sera nulle,

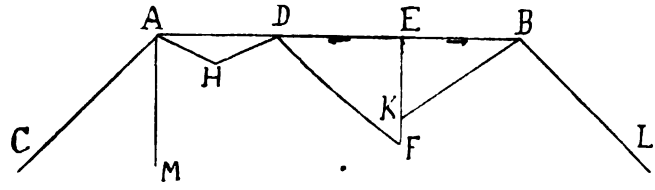

Fig. 127.

un segment DE où les terres glisseront vers la gauche, un segment EB où les terres glisseront vers la droite. En déplaçant les points D et E, on obtiendra l'infinité double des états d'équilibre. La butée des terres sur le segment EB s'obtient par une solution conique ; la butée des terres sur DE s'obtient par une solution qui n'est conique que sur une certaine étendue. On construit les solutions linéaires AHD et MAC ; on les relie par une solution intermédiaire comprise entre deux lignes de discontinuité finie, puis on construit une solution sur le contour apparent DE et la caractéristique du premier système qui part du point D ; cette dernière caractéristique comprend une partie de la droite DH, une courbe convexe vers le point A et une verticale.

On peut représenter une force située dans un plan par son moment linéaire autour d'un point fixe pris en dehors du plan ; en représentant de cette manière toutes les forces limites, on obtiendra une surface qui représentera l'ensemble de tous les états d'équilibre limite. Mais on peut se borner à chercher la force limite pour une ligne d'action donnée ; on y arrive de la manière suivante. On peut toujours imaginer un massif semblable au massif donné ; on peut alors prendre AD arbitrairement et construire le diagramme DF des pressions normales sous le segment DE ; on choisit une fausse position du point E et je dis qu'on peut construire le segment EB et le diagramme KB des pressions sous ce segment. En effet, la force totale P est la résultante de la pression R sur DE et de la pression S sur EB ; les directions de ces trois forces étant connues, on détermine immédiatement leurs rapports. La direction de la droite BK est connue par la solution conique dont le sommet est B ; on détermine EB par la condition :

$$\frac{DEF}{EKB} = \frac{R}{S}.$$

Par une double intégration graphique du diagramme des pressions, on trouvera le point d'application de la charge. On amènera ce point dans la position juste en déplaçant le point E. Il faut alors vérifier que la discontinuité en E est possible et en déterminer la propagation.

On peut aussi chercher les solutions où la discontinuité du point E est (fig. 128) réduite à zéro. Les pressions sur les deux segments DE et EB doivent alors avoir la même direction ; cette direction est celle de la charge. Il y a encore une infinité double d'états d'équilibre, car on

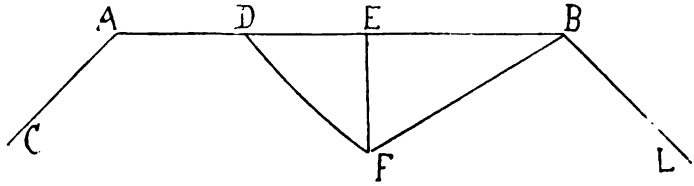

Fig. 128

peut faire varier le segment AD et la direction des pressions. Si l'on donne la ligne d'action de la force, on peut trouver l'état d'équilibre limite par une méthode analogue à celle que que nous avons exposée plus haut. On imagine un massif semblable, on se donne AD, on construit le diagramme DEF des pressions normales. On choisit une

fausse position du point E, on construit le diagramme EFB en menant FB suivant une direction connue par la solution conique qui règne sous EB ; on détermine le centre de la charge et on l'amène dans une position juste en faisant varier le point E.

Enfin on peut demander si le remblai est en équilibre sous l'action d'une force plus grande, complètement connue. On se donne les directions des pressions sur les segments DE et EB (fig. 127), et l'on cherche la force maxima par les mêmes opérations que celles que nous avons faites dans le cas du glissement des terres sous la plaque. En faisant varier les directions des pressions, on obtiendra une force maxima égale à la force donnée. On vérifie si la discontinuité se perd dans le remblai. Il y a une certaine indétermination, puisqu'on dispose de deux directions pour réaliser une condition. On pourrait aussi supposer que la fonction u varie d'après une loi quelconque sous la plaque, et trouver encore d'autes solutions.

194. *Influence du sol inférieur.* Supposons que le remblai repose sur un sol de même nature. Soient CD (fig. 129) le terrain naturel, CA l'un des talus du remblai. La droite CD commande une solution linéaire DCF ; la droite CA est une caractéristique du premier système ; on construit une solution conique de sommet C sur les deux caractéristiques CA et CF de systèmes opposés. On trouve alors une caractéristique AM curviligne passant

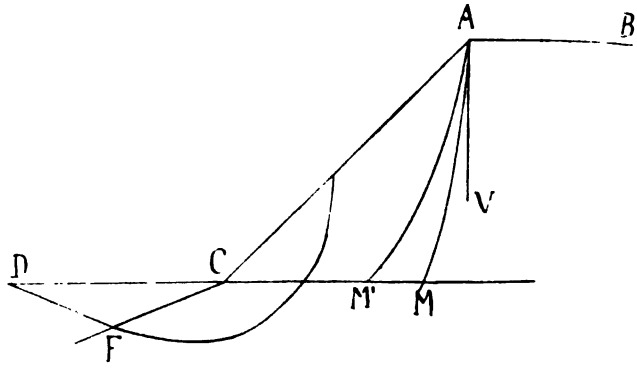

Fig. 129

par le point A et c'est cette caractéristique que l'on introduit dans la détermination des pressions sous la plaque. On trouve des pressions plus grandes que dans le cas où cette caractéristique est verticale. Si le point C s'éloigne à l'infini, on retrouve la caractéristique verticale.

On peut aussi supposer un sol ayant un coefficient de frottement

plus considérable que le remblai ; on détermine les pressions sous la surface CM du sol et l'on calcule les fonctions (p, u) au-dessus de cette surface en tenant compte du changement du coefficient de frottement.

Enfin, on peut supposer un sol solide ; on prend alors CM comme contour apparent ; on trouve la caractéristique AM', les pressions sont encore plus fortes que dans les cas précédents.

195. *Problème de la plaque horizontale enfoncée dans un talus.* — Dans les murs de soutènement ordinaires, on fait équilibre à la poussée des terres, en construisant des murs de grand poids ; certains constructeurs ont cherché des combinaisons qui tendent à équilibrer la poussée des terres par la résistance de la terre elle-même. L'une de ces combinaisons est la suivante : on établit (fig. 130) une paroi rigide ED fixée, à sa partie inférieure, sur une fondation invariable ; cette paroi est articulée à une plaque horizontale CB engagée dans les terres et c'est la résistance au glissement de la plaque qui doit maintenir la paroi ED en équilibre. On peut faire à ce système l'objection suivante : on ne peut pas vaincre la poussée des terres en prenant appui sur la terre qui pousse. Aussi les inventeurs disent : menons le talus naturel DA ; au-delà de ce talus naturel, les terres ne poussent plus ; on peut calculer le poids des terres qui reposent sur le segment AB de la plaque et en déduire la résistance au glissement de la plaque sur les terres inférieures. Nous n'admettons pas cette division du massif, par le talus naturel, en terres qui poussent et qui ne poussent pas ; nous montrerons plus loin comment on peut déterminer complètement l'équilibre limite des terres soutenues par une construction de cette espèce ; mais il y a là un problème intéressant à résoudre ; quelle est la force de traction maxima que l'on peut appliquer à une plaque horizontale enfoncée dans un talus, sans que l'équilibre soit rompu ? Si le talus est indéfini et a l'inclinaison du talus naturel, il nous paraît évident que cette force est rigoureusement nulle, car le talus naturel indéfini en hauteur est dans un état d'équilibre limite et la plus petite force dirigée vers le vide suffit pour troubler cet équilibre ; cependant, le poids qui repose sur la plaque peut être très considérable ; ce n'est donc pas en calculant le frottement dû à ce poids que nous pourrons

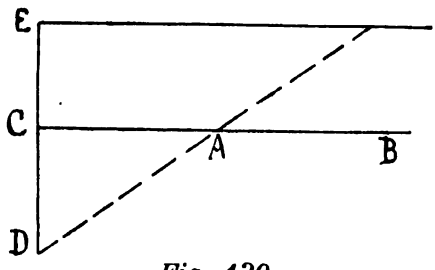

Fig. 130.

résoudre ce problème exactement ; la question est beaucoup compliquée. Nous généraliserons le problème en supposant deux talus de directions différentes et quelconques au-dessus et au-dessous de la plaque ; nous étudierons successivement l'équilibre du massif supérieur et inférieur ; nous supposerons le talus supérieur indéfini ou limité ; enfin nous calculerons la résistance à la traction et à l'enfoncement de la plaque.

196. *Poussée minima du massif supérieur.* — Soient (fig. 131)

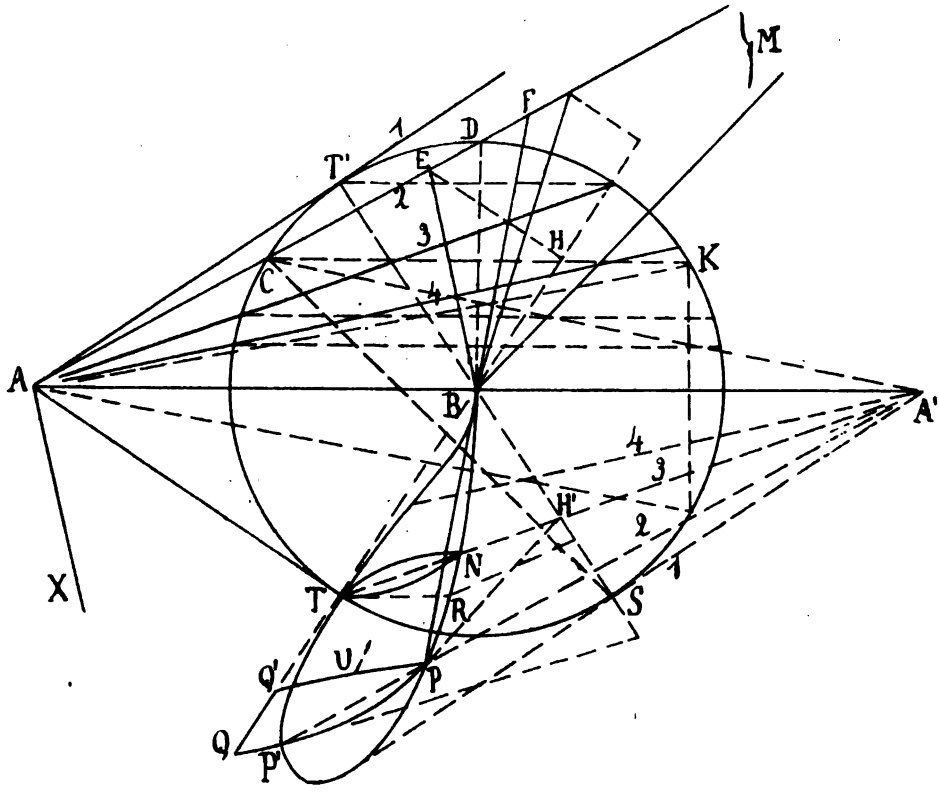

Fig. 131.

AB la plaque horizontale, AF le talus supérieur. Faisons abstraction de l'action des terres inférieures sur la plaque ; supposons, par exemple, que ces terres soient solidifiées et forment une surface horizontale sans frottement sur laquelle la plaque repose. Nous nous proposons de chercher la poussée des terres sur la face supérieure de la plaque au moment où celle-ci est sur le point de glisser vers le vide.

La première idée qui se présente à l'esprit est de chercher si la plaque peut glisser sous les terres qu'elle supporte ; le problème est alors semblable à celui que nous avons résolu en cherchant la poussée sur un mur. La pression des terres sur la plaque AB forme, avec la normale, un angle égal à l'angle du frottement ; la droite AB doit être un contour apparent ou une caractéristique du premier système. Le talus AF commande une solution linéaire ; nous prendrons évidemment la solution qui correspond à la poussée des terres et qui suppose que les terres glissent vers le bas ; les caractéristiques sont parallèles aux droites CT, CT' de l'épure circulaire. En suivant machinalement la méthode employée pour le mur de soutènement, nous construirons une solution sur la caractéristique AX du premier système et le contour apparent AB du même système. Mais cette solution ne répond pas à la question, car elle est en dehors du massif considéré ; l'hypothèse du glissement sous les terres est donc irréalisable. Le talus AF commande la solution linéaire ; cette solution linéaire ne peut être reliée continûment à une autre que par une caractéristique ; or, aucune des deux caractéristiques passant par A ne tombe dans l'intérieur du massif FAB ; la solution linéaire doit donc régner jusqu'à la plaque, à moins qu'il ne se produise une discontinuité finie. Nous trouverons plus loin des solutions qui admettent une ligne de discontinuité passant par A ; mais il est facile de voir que ces solutions donnent une poussée au vide plus grande que la solution linéaire. Si la plaque est sollicitée par une force horizontale faisant équilibre à cette poussée au vide, on pourra diminuer cette force jusqu'au moment où l'on réalisera l'état d'équilibre qui admet la poussée minima et cet état d'équilibre est donné par la solution linéaire.

On trouve la pression p en un point B de la plaque, en menant une caractéristique par ce point. Soit, par exemple, BE la caractéristique du premier système menée jusqu'à la rencontre du talus ; au point de rencontre E, la pression p est nulle ; intégrons l'équation différentielle des pressions le long de la caractéristique, on trouve, en réduisant le poids spécifique à l'unité,

$$p = \Delta y_1 = \text{BH}.$$

On obtient le point H en menant EH parallèlement au premier talus naturel AT, et BH perpendiculairement à ce talus.

Connaissant la pression p en B, on obtient la pression P sur la plaque au même point B, au moyen de l'épure circulaire. Le pôle des facettes est le point C ; on mène CK parallèlement à la plaque ; la

pression P est représentée par AK à une échelle où la pression p est représentée par AT ; on a donc

$$\frac{P}{AK} = \frac{BH}{AT}.$$

L'angle i de la pression P avec la normale à la plaque est l'angle BAK ; mais cet angle est porté en sens contraire du sens vrai. Portons

$$A'B = BA ;$$

l'angle AA'C donne l'angle i en grandeur et en sens ; il résulte de là que la pression P est perpendiculaire à la droite A'C. La grandeur de la pression P est donnée par une quatrième proportionnelle ; on peut l'obtenir de la manière suivante. Portons, sur une perpendiculaire à A'S,

$$BH' = BH ;$$

remarquons que l'on a

$$AT = A'S, \quad AK = A'C ;$$

la proportion qui donne P peut s'écrire

$$\frac{P}{A'C} = \frac{BH'}{A'S}.$$

Si l'on mène H'P perpendiculairement à SC, on construit un triangle BH'P dont les côtés sont respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle A'SC et l'on trouve que la pression BP satisfait à la proportion précédente.

Cependant, on peut encore trouver cette pression par une construction beaucoup plus simple. Soit AC le talus ; menons A'C ; par B menons une perpendiculaire BF au côté A'C jusqu'à la rencontre du talus ; je dis que BF représente la pression P cherchée. En effet, menons la verticale BD jusqu'au talus et exprimons l'équilibre du massif DBA ; nous trouvons ainsi que la pression totale sur AB se compose du poids du volume ABD et de la pression sur DB, pression qui est parallèle au talus. Cette décomposition s'applique aussi à la pression en B par unité de surface ; il suffit de diviser les composantes par la moitié de AB. Les deux composantes de la pression P sont alors, si on réduit le poids spécifique à l'unité : 1° une composante verticale représentée par DB ; 2° une composante FD parallèle

au talus et que nous ne connaissons pas. Mais, au lieu de déterminer cette composante, nous utilisons la propriété que la pression FB est perpendiculaire à la droite A'C et nous arrivons ainsi à la construction simple que nous avons annoncée.

On peut considérer BF comme la pression de la plaque sur les terres supérieures ; la pression des terres sur la plaque est FB ou BP. On peut faire varier l'inclinaison du talus et construire la courbe décrite par le point F ; on aura la représentation de toutes les pressions en B. Nous avons préféré construire la courbe décrite par le point P ; on peut déduire le point P du point F, mais on peut aussi obtenir le point P en menant A'P parallèlement au talus AF et BP perpendiculairement à la droite A'C. Si nous faisons mouvoir le point C sur la circonférence de l'épure circulaire, nous trouvons deux points de la courbe pour chaque talus. Ainsi, pour le talus AF, nous pouvons prendre le pôle C ou le pôle D ; nous trouvons les pressions BP et BP'. La pression BP' correspond à la seconde solution linéaire ; elle suppose que les terres glissent vers le haut suivant une caractéristique ; mais les points P et P' décrivent deux parties d'une même courbe analytique, car on passe de la première à la seconde solution linéaire par le changement de signe d'un radical. La courbe est symétrique par rapport à l'axe AB ; nous n'avons pas représenté la moitié de la courbe qui se trouve au-dessus de cet axe : elle correspond aux talus qui passent sous la plaque et qui, au point de vue analytique, donneraient des pressions négatives sur la plaque. Nous avons choisi les quatre talus marqués par les chiffres 1, 2, 3 et 4 ; nous avons obtenu 4 groupes de deux points ; cependant, pour le talus naturel, qui est marqué par le chiffre 1, les deux points coïncident, les deux solutions linéaires se confondent.

On peut trouver facilement l'équation de la courbe ; elle est du quatrième degré. De la construction, on peut déduire que cette courbe est unicursale, car, à un point C de la circonférence, correspond un point unique F ou P de la courbe, et la relation entre les coordonnées est algébrique ; or, la circonférence est unicursale, les coordonnées du point C peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles d'un paramètre ; les coordonnées du point F ou P peuvent donc aussi s'exprimer par des fonctions rationnelles de ce même paramètre. Au point B, la courbe a un point double et les deux tangentes se confondent sur la verticale ; en effet, si le talus AF se rapproche indéfiniment de la droite AB, la droite BF devient perpendiculaire à A'A.

Pour le talus AF que nous avons considéré, la pression P fait un certain angle i avec la normale à la plaque ; la plaque est donc

poussée vers le vide, et pour la maintenir en équilibre, il faudra y appliquer une force horizontale dont la valeur est

$$F = P \sin i \times \frac{AB}{2}.$$

Nous avons dit plus haut que cette valeur est une limite inférieure ; on peut le démontrer directement. En effet, si l'on diminue cette force, le massif EBA ne sera plus en équilibre et glissera vers le vide ; les secondes lignes de glissement fonctionnent ; le massif EBM se déforme par glissement parallèle à MB pour remplir le vide formé par le déplacement de BE ; quelques éboulements secondaires se produisent vers les points E et M.

197. *Poussée maxima ou butée du massif supérieur.* — Supposons la plaque maintenue en équilibre par la force horizontale minima F dirigée vers les terres ; faisons croitre graduellement cette force ; il arrivera un moment où la plaque se déplacera vers les terres ; au moment où l'équilibre est sur le point de se rompre, la force horizontale prendra une valeur H et fera équilibre à une force contraire qui est la composante horizontale de la butée des terres. Pour obtenir cet état d'équilibre, nous devons évidemment supposer sous le talus la seconde solution linéaire où les terres tendent à glisser vers le haut suivant une caractéristique, c'est-à-dire celle qui correspond au pôle D de la figure 131. Nous avons représenté, sur la figure 132, les caractéristiques ME et AE du premier et du second système ; le talus AM commande la solution AEM, mais l'angle EAB peut être occupé par une solution conique quelconque construite sur la caractéristique AE. L'une de ces solutions est la solution

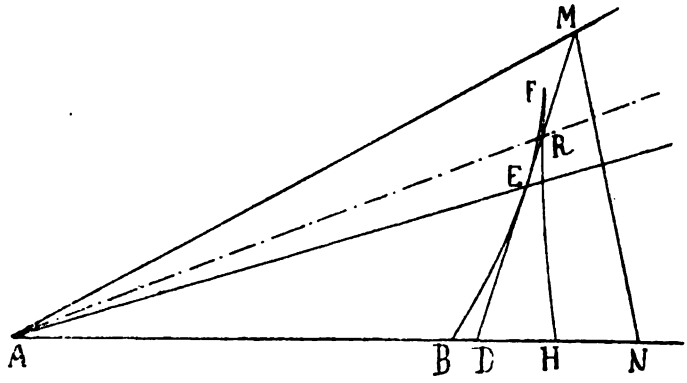

Fig. 132.

linéaire prolongée qui nous a donné la pression P' faisant l'angle i' avec la normale à la plaque ; mais on peut aussi construire des solutions à fortes pressions et la dernière limite de l'équilibre s'obtiendra en supposant que la plaque est sur le point de glisser sous les terres supérieures ; on déterminera cet état d'équilibre en construisant une solution conique sur la caractéristique AE et le contour apparent AB du second système. Le problème est identiquement celui que l'on doit résoudre pour trouver la butée des terres sur un mur AB. On trouve très facilement la pression Q en B par une construction que nous avons déjà souvent appliquée et que nous n'avons pas reproduite sur la figure. Nous avons représenté cette pression en BQ sur la figure 131. La force horizontale totale qui pousse la plaque au moment où l'équilibre est sur le point de se rompre, est donnée par la formule

$$H = Q \sin \varphi \times \frac{AB}{2}.$$

198. *États d'équilibre intermédiaires.* — Nous pouvons faire varier la force horizontale qui pousse la plaque, entre les deux limites F et H, et chercher les états d'équilibre correspondants. Nous pouvons d'abord construire sur AE (fig. 132) des solutions coniques comprises entre la solution EB et la solution linéaire ED ; ce sont des solutions à fortes pressions, les caractéristiques sont concaves vers le sommet, mais la courbure totale de l'arc de la caractéristique du premier système peut diminuer jusqu'à zéro ; on a alors la solution linéaire qui nous a donné la pression P' au point B ; l'angle de la pression avec la normale à la plaque varie de φ à i'. On peut ensuite construire sur la caractéristique AE des solutions à faibles pressions ; la caractéristique comprend un arc concave EF, un point de rebroussement, puis un arc convexe FH ; la solution présente un contour apparent qu'il faut remplacer par une discontinuité finie. Nous mènerons donc une ligne de discontinuité finie AR enlevant une partie de la solution linéaire de butée et, par les méthodes indiquées précédemment, nous déterminerons les fonctions (p, u) en un point R sous la ligne de discontinuité, nous construirons la solution conique engendrée par la discontinuité et nous déterminerons la pression sur la plaque. Nous pouvons faire tourner la ligne de discontinuité depuis la position AE jusqu'à la position AM ; dans ce dernier cas, la solution linéaire de butée disparaît complètement, on retrouve la solution linéaire de poussée qui nous a donné la pression P en B. On peut donc faire varier la pression en B depuis la pression Q jusqu'à

la pression P en passant par P' ; l'angle de la pression avec la normale à la plaque varie depuis l'angle φ jusque l'angle i en passant par i' ; l'extrémité de la pression en B décrit une courbe que l'on peut construire par points et que nous avons représentée en QP'P sur la figure 131 ; elle est formée de deux arcs PP' et P'Q de courbes analytiquement différentes.

Toutes ces solutions peuvent être considérées comme des solutions limites, si l'on se donne la direction des pressions. Elles répondent à la question suivante : on soutient la plaque par des pressions qui suivent la loi du triangle et qui agissent suivant une direction donnée, on demande la limite supérieure de ces pressions. En effet, on doit alors supposer que les terres sont sur le point de glisser vers le haut ; on choisira donc, sous le talus, la solution de butée ; en faisant varier l'angle des pressions avec la normale, on retrouve les pressions représentées par la courbe QP'P. Mais on peut aussi chercher les limites inférieures de ces pressions de direction donnée ; on doit alors supposer que les terres sont sur le point de glisser vers le bas ; on choisira donc la solution linéaire de poussée sous le talus. Partons de l'état d'équilibre qui nous a donné la pression Q ; nous pouvons modifier cette solution aussi peu que nous voulons, en supposant la poussée sous le talus, mais en menant une ligne de de discontinuité faisant un angle suffisamment petit avec le talus ; car si cet angle tend vers zéro, la solution de poussée disparaît complètement pour être remplacée par la butée, et l'on retrouve la solution qui nous a donné la pression Q. En menant une ligne de discontinuité faisant un angle suffisamment petit avec le talus, nous obtiendrons une solution qui différera infiniment peu de la solution linéaire de butée et qui, par conséquent, sera limitée par une caractéristique voisine de AE (fig. 132) ; on construira une solution sur cette caractéristique et le contour apparent AB. Mais la solution engendrée par la discontinuité finie est à caractéristiques convexes vers le sommet ; non seulement la caractéristique AE s'est déplacée, mais il s'est formé un contour apparent et une petite nappe supplémentaire dans le voisinage de AE ; il faut donc remplacer ce contour apparent par une seconde discontinuité finie. On trouve donc une solution qui se compose de trois solutions séparées par deux discontinuités finies, savoir : la solution linéaire de poussée, une solution engendrée par une discontinuité voisine du talus, une solution construite sur le contour apparent AB et reliée à la précédente par une seconde ligne de discontinuité. En augmentant l'étendue angulaire de la solution linéaire de poussée, on trouve une infinité d'états d'équilibre de cette espèce ; on trouve toujours des pressions faisant

l'angle du frottement avec la normale à la plaque, mais ces pressions diminuent. Il y a évidemment une limite inférieure ; on reconnaît, en effet, que si la première ligne de discontinuité fait avec le talus un angle de plus en plus grand, la caractéristique et le contour apparent de la solution qu'elle engendre se rapprochent de la plaque et finissent par la dépasser ; la seconde ligne de discontinuité finit par se confondre avec la plaque et la solution inférieure disparaît. Comme la plaque AB n'a pas cessé d'être contour apparent, il faut qu'en ce moment la seconde ligne de discontinuité se confonde aussi avec le contour apparent de la seconde solution, ce qui indique que la troisième solution se réduit à zéro, pour devenir impossible. On trouve alors une pression Q' qui est la limite inférieure des pressions qui font l'angle du frottement avec la normale à la plaque. Si on continue à augmenter l'étendue angulaire de la solution de poussée, le contour apparent de la solution qu'elle engendre dépasse la plaque, il n'y a plus de troisième solution admettant AB comme contour apparent ; on doit se borner à interrompre par la plaque la solution engendrée par la première discontinuité ; on trouve des pressions qui forment avec la normale à la plaque un angle plus petit que l'angle du frottement. Si la première ligne de discontinuité continue à se mouvoir dans le même sens, elle finira par se confondre avec la plaque, la solution de poussée règne alors complètement au-dessus de la plaque ; on retrouve la pression P obtenue précédemment. En résumé, nous sommes parti de la pression Q représentée sur la figure 131 ; nous avons fait décroitre cette pression jusqu'à Q' sans changer sa direction ; puis nous avons obtenu des pressions représentées par une courbe Q'P que l'on peut construire par points.

Coupons, par exemple, la solution linéaire de poussée par la droite ADC (fig. 133) ; nous trouvons la solution CAB dont les caractéristiques sont convexes vers le sommet ; le contour apparent passe sous la plaque, mais il en est très rapproché ; il suffirait de relever un peu la ligne de discontinuité pour obtenir la pression Q' ; on obtient une pression faisant

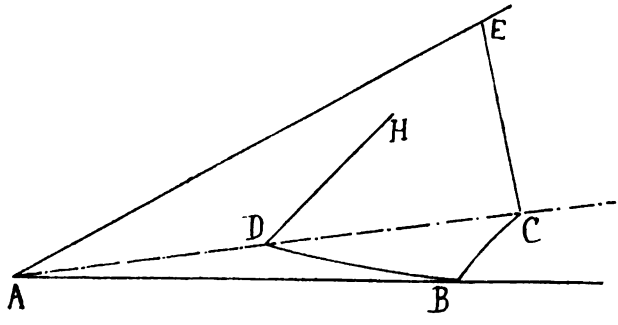

Fig. 133.

avec la normale à la plaque un angle très voisin de l'angle φ ; elle est représentée sur la figure 131 par un point situé très près du point Q'.

Prenons ensuite (fig. 134) une ligne de discontinuité ADC plus rapprochée de la plaque ; on trouve une pression représentée sur la figure 131 par le point U ; on trouverait ainsi autant de points que l'on voudrait de la courbe PQ'.

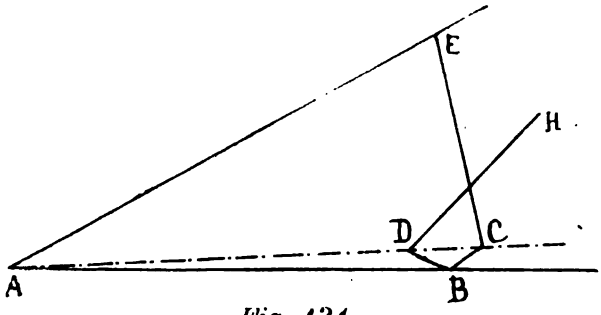

Fig. 134.

Supposons maintenant une pression en B dont l'extrémité se trouve à l'intérieur du contour PP'QQ'P (fig. 131) ; elle est comprise entre la limite supérieure et la limite inférieure qui admettent l'équilibre ; elle est donc aussi en équilibre. Nous n'avons plus alors un équilibre limite mais un équilibre intermédiaire ; on peut, dans une certaine mesure, augmenter ou diminuer la pression sans rompre l'équilibre. Comme dans tous les problèmes où le frottement intervient, l'état d'équilibre intermédiaire est indéterminé. On peut partir de la limite supérieure et la modifier en introduisant la solution linéaire de poussée sous le talus dans un angle croissant à partir de zéro ; on peut partir de la limite inférieure et introduire la solution linéaire de butée sous le talus dans un angle croissant à partir de zéro. On se donne la direction des pressions et l'on cherche la seconde ligne de discontinuité. Cette indétermination existait déjà pour les pressions comprises entre Q et Q' faisant l'angle du frottement avec la normale à la plaque ; nous les avons obtenues en partant de la limite supérieure ; nous pouvions les obtenir aussi en partant de la limite inférieure et en introduisant la solution linéaire de butée sous le talus dans un angle croissant à partir de zéro.

Il y a encore d'autres solutions possibles. Ainsi, on pourrait réduire l'angle du frottement à l'inclinaison du talus donné ; on trouverait un état d'équilibre intermédiaire et l'on vérifierait sans peine que l'extrémité de la pression obtenue est à l'intérieur du contour des solutions limites. Ces états d'équilibre présentent peu d'intérêt ; dès qu'il y a un changement quelconque dans les forces sollicitantes, il y a mouvement ou tassement dans un sens ou dans l'autre : l'angle du frottement atteint sa valeur limite. Cette valeur est certainement atteinte au moment où l'équilibre est sur le point de se rompre, et ce sont ces états d'équilibre limite qui sont les plus intéressants.

On peut aussi introduire des discontinuités qui ne sont pas nécessaires. Soit fig. 135) AME la solution linéaire de butée ; prolongeons-la vers le bas et coupons-la par une ligne de discontinuité AR ; la

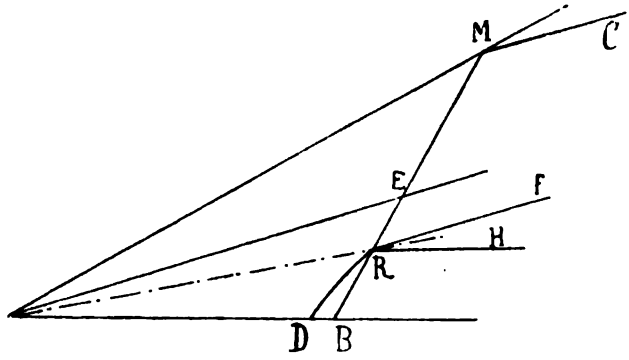

Fig. 135.

caractéristique du premier système forme un angle positif en R, puis prend une courbure négative. On peut obtenir la même valeur de la fonction u sur la plaque, en construisant une solution conique sur AE, à caractéristiques concaves vers le sommet. Je dis que c'est la solution conique qui se produira et que la solution discontinue n'est pas stable. En effet, supposons la solution discontinue réalisée jusqu'à la caractéristique MRD, et continuons la construction de la solution en appliquant la méthode générale. Les deux caractéristiques MC et MR, de systèmes opposés, déterminent la solution linéaire qui est limitée à la caractéristique RF. Au point R, la fonction u subit un accroissement brusque égal à l'angle R ; on peut le réaliser en prolongeant la ligne de discontinuité ou en construisant une solution pseudo-conoïde de foyer F. Or, cette dernière est la solution stable, car il suffirait de remplacer le point angulaire R par un arrondi, pour rendre la solution discontinue impossible. La solution discontinue est donc instable.

199. *Discussion.* — Nous avons supposé, dans l'étude précédente, que le talus supérieur avait l'inclinaison indiquée par le chiffre 2 sur la figure 131 ; il s'agit de voir comment le contour PP'QQ'P se transforme, lorsqu'on fait varier l'inclinaison du talus.

Si d'abord le talus s'incline davantage pour se confondre avec le talus naturel, les points P et P' se rapprochent et viennent se confondre ; les deux courbes du contour partent de ce point. Reprenons la figure 132 ; si l'inclinaison du talus augmente, l'épure circulaire indique que l'angle MAE diminue pour se réduire à zéro lorsque le talus a l'inclinaison du talus naturel ; toutes les solutions obtenues par la discontinuité AR disparaissent ; ce sont celles qui nous ont donné l'arc PP' de la figure 131.

Supposons maintenant que l'inclinaison du talus diminue ; la droite AE de la figure 132 se rapproche de la plaque et il arrive un moment où l'angle EAB est nul. Dans ce dernier cas, il est facile de voir que la solution linéaire de butée est la seule qui donne une pression formant avec la normale à la plaque un angle égal à l'angle du frottement, de sorte que les trois points P', Q et Q' de la figure 131 viennent se confondre en un point unique T. En effet, nous avons obtenu l'arc P'Q en construisant les solutions coniques sur la caractéristique AE et le contour apparent AB (fig. 132) ; toutes ces solutions se réduisent à la solution linéaire, quand l'angle AEB disparaît ; le contour apparent devient une caractéristique. Nous avons obtenu la droite QQ' en imaginant une discontinuité sous le talus de poussée ; mais dans le cas qui nous occupe, le contour apparent de la solution engendrée par la discontinuité passe immédiatement sous la plaque ; on trouve les limites inférieures représentées par une certaine courbe TN (fig. 131).

Si l'inclinaison du talus continue à diminuer, la caractéristique AE passe sous la plaque ; il n'est plus possible de réaliser une pression faisant l'angle du frottement avec la normale à la plaque. On a pour la butée un cas analogue à celui que nous avons rencontré dans la poussée ; la plaque ne peut plus glisser sous les terres ; la rupture de l'équilibre se produit par l'entraînement des terres et de la plaque, avec glissement vers le haut d'un autre massif compris entre les deux caractéristiques qui passent par l'extrémité de la plaque. Les limites supérieures et inférieures sont données par des courbes dont les extrémités représentent les pressions dans les deux solutions linéaires ; les autres points s'obtiennent en imaginant une discontinuité sous l'une ou l'autre de ces solutions linéaires.

200. *États d'équilibre du massif inférieur.* — Lorsque la plaque est sur le point de se déplacer vers le vide, les terres supérieures produisent au point B de la plaque une pression P (fig. 136) faisant l'angle i avec la normale à la plaque ; au même point, les terres inférieures produisent une certaine pression S faisant un angle j avec la normale à la plaque. Les composantes normales de ces pressions doivent se faire équilibre ; on a donc

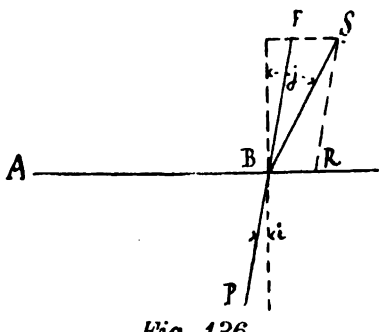

Fig. 136.

$$S \cos j = P \cos i ;$$

les composantes tangentielles se composent en une résultante dirigée vers les terres et dont la valeur est

$$R = S \sin j - P \sin i ;$$

en éliminant la réaction inconnue S, on trouve

$$R = \frac{P \sin (j - i)}{\cos j}. \qquad (72)$$

On peut aussi trouver R en construisant le triangle BFS.

La résistance totale de la plaque à la traction vers le vide s'obtiendra en multipliant R par la moitié de la longueur de la plaque.

Nous connaissons la pression P et l'angle i ; mais avant d'appliquer la formule (72), il faudra déterminer l'angle j. Il est facile de prévoir que deux cas vont se présenter. Si le talus supérieur est assez plat, les pressions normales sur la plaque seront peu importantes et la plaque pourra glisser sur les terres inférieures sans provoquer l'éboulement du talus ; l'angle j est alors égal à l'angle du frottement ; on a donc

$$R = \frac{P \sin (\varphi - i)}{\cos \varphi}. \qquad (73)$$

Si, au contraire, le talus supérieur devient plus incliné, il est à prévoir que l'éboulement du talus inférieur pourra se produire avant le glissement de la plaque ; il faut alors déterminer l'angle j de manière que le talus inférieur soit un plan d'éboulement et appliquer l'équation (72). Nous allons chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que la formule (73) soit applicable ; nous montrerons ensuite comment on détermine l'angle j dans les autres cas.

201. *Cas du glissement sur les terres inférieures.* — Lorsque les pressions de la plaque sur les terres inférieures forment l'angle du frottement avec la normale, ces pressions sont complètement déterminées, car elles ont mêmes composantes normales que les pressions sur les terres supérieures. Nous pouvons donc chercher toutes les solutions possibles au-dessous de la plaque et voir si elles sont compatibles avec l'équilibre du talus inférieur.

On reconnait immédiatement que la plaque est un contour apparent ou une caractéristique du second système. La plaque AB sera une caractéristique si la pression a une certaine valeur qu'il est facile de déterminer ; elle est la même que dans la solution linéaire ; l'épure circulaire donne immédiatement le pôle des facettes, lorsque la caractéristique du second système est dirigée suivant une ligne horizontale ; on trouve la solution de butée qui correspond au talus indiqué par le chiffre 3 sur la figure 131. La pression sur les terres

inférieures est représentée par BT ; on en déduit immédiatement la pression BR sur les terres supérieures, en menant une horizontale TR jusqu'à la rencontre avec la courbe des extrémités des pressions P ; on en déduit ensuite l'inclinaison A'R qu'il faut donner au talus supérieur pour réaliser cette pression. Soient (fig. 137) AM ce talus, AM' l'inclinaison du talus inférieur pour lequel AB est une caractéristique du second système, α_1 et β_1 les angles de ces deux talus avec l'horizon. Je dis que le plan AM' est le plan d'éboulement qui correspond au talus AM dans l'hypothèse du glissement de la plaque. En effet, le talus AM' est en équilibre ; un talus plus plat est, à plus forte raison, en équilibre ; si, au contraire, nous donnons au talus inférieur une inclinaison plus grande, nous serons amené à construire une solution conique sur la caractéristique AB et la caractéristique du premier système commandée par le talus ; l'angle de ces deux caractéristiques est plus petit que l'angle ordinaire EAB ; on trouve une solution à trois nappes et il est impossible de conserver la caractéristique AB.

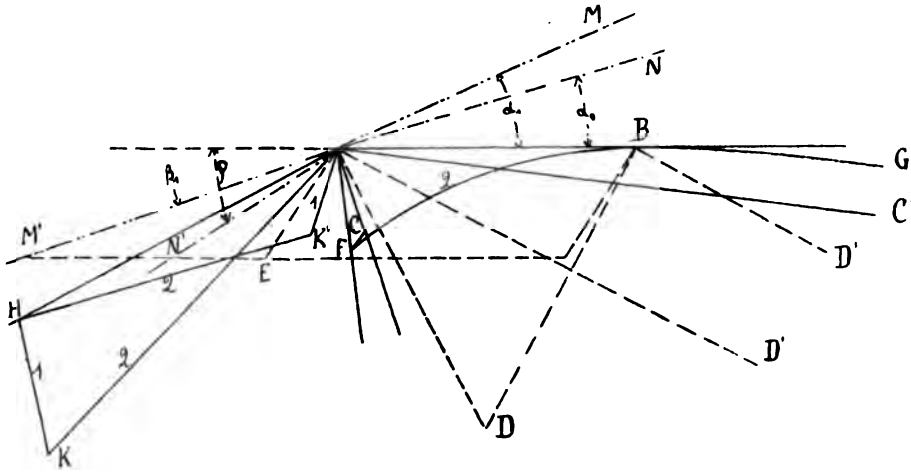

Fig. 137.

Supposons que le talus supérieur soit plus incliné que AM ; je dis que dans ce cas, l'hypothèse du glissement de la plaque sur les terres inférieures est irréalisable. En effet, si on admet cette hypothèse, AB cesse d'être une caractéristique pour devenir le contour apparent d'une solution à fortes pressions ; or, nous avons démontré (140) que les contours apparents du second système limitent à gauche les solutions à fortes pressions ; on trouve donc une solution au-dessus de la plaque ; il n'existe pas de solution en dessous ; l'équilibre du talus inférieur est impossible.

Pour pouvoir construire une solution au-dessous du contour apparent AB, c'est-à-dire limitée à droite par ce contour apparent, il faut supposer des pressions plus faibles que celles où AB est une caractéristique ; il faut donc supposer que le talus supérieur est moins incliné que AM. On trouve alors une caractéristique du second système de la forme GBFC ; la solution est à trois nappes, car nous n'avons rencontré des solutions à faibles pressions et à nappes nombreuses que lorsque les contours apparents sont plus inclinés que le talus naturel ; la nappe BG est limitée à gauche par une caractéristique du second système (138) ; la nappe BF est comprise entre deux contours apparents de systèmes opposés ; la nappe CF est limitée à droite par une caractéristique du premier système.

Nous pouvons suivre les évolutions que subit cette solution conique lorsque l'inclinaison du talus supérieur croit à partir de zéro. Si le talus supérieur est horizontal, les terres qui reposent sur la plaque disparaissent ; on obtient les solutions linéaires commandées par le plan libre AB ; la caractéristique qui passe par B se compose des deux droites BD et BD'. La ligne CFBG a donc pour limite la ligne brisée DBD', lorsque l'inclinaison du talus supérieur tend vers zéro. Cela semble paradoxal, mais il faut remarquer que la courbure au point B de la caractéristique du second système augmente indéfiniment quand la pression diminue jusqu'à zéro et, comme cela arrive souvent dans ces circonstances, la courbe se brise et forme un angle. Si nous faisons croitre l'inclinaison du talus supérieur depuis zéro jusque α_1, la caractéristique AC décrit l'angle DAE.

Faisons d'abord abstraction du contour apparent AF et cherchons dans quel cas on peut relier la caractéristique AC au talus inférieur par une solution d'équilibre. Si la caractéristique AC ne dépasse pas la verticale, le talus inférieur peut être établi suivant le talus naturel, car ce talus naturel est une caractéristique du second système et l'on peut construire une solution sur cette caractéristique et la caractéristique AC. Pour une certaine inclinaison α_0 du talus supérieur, la caractéristique AC prendra la position verticale ; elle sera reliée au talus naturel inférieur par la solution linéaire. Si l'inclinaison du talus supérieur dépasse α_0, la caractéristique AC dépasse la verticale ; on trouve un plan d'éboulement dont l'inclinaison β est fonction de l'inclinaison α du talus supérieur.

Mais ces résultats ne sont qu'approximativement vrais, car le contour apparent doit être remplacé par une discontinuité finie ; la valeur α_0 et la relation α et β doivent être déterminées d'une autre manière. Donnons-nous le plan d'éboulement AH (fig. 138) d'inclinaison plus grande que β_1 ; soit AG la caractéristique du premier système

commandée par le talus AH ; menons une ligne de discontinuité AR ; nous engendrons une solution qui présente un certain contour apparent. En faisant tourner AR depuis AG jusqu'à AH, on trouve les deux limites entre lesquelles le contour apparent évolue ; ce sont les caractéristiques du second système qui passent par A dans les deux solutions linéaires ; ce contour apparent peut donc se confondre avec la droite AB ; on cherche la solution qui satisfait à cette condition par la méthode des fausses positions ou des approximatives successives ; on trouve ainsi une pression

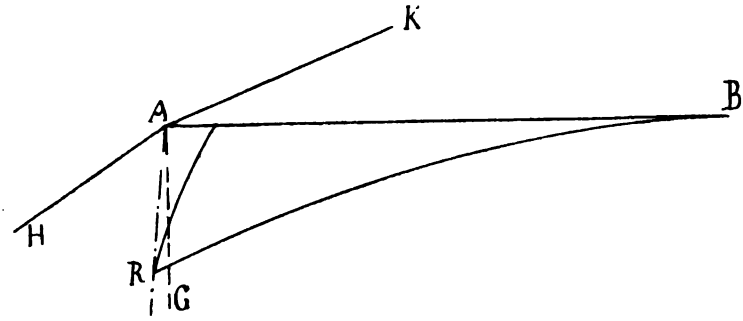

Fig. 138.

normale sur AB qui peut être engendrée par un talus supérieur d'inclinaison α. On peut aussi se donner α et trouver β ; connaissant α, on détermine les pressions sur les terres inférieures et l'on construit la solution qui règne sous la plaque ; on cherche alors la discontinuité AR qu'il faut mener dans cette solution pour engendrer la solution linéaire de butée, et l'on trouve le talus AH. On trouve une valeur unique pour α quand β est donné, et réciproquement. Si l'on fait croître α, β diminue, ce qui peut être considéré comme évident. La relation entre les angles α et β peut être mise sous les deux formes

$$\alpha = F(\beta) \quad \text{ou} \quad \beta = f(\alpha).$$

Si le plan d'éboulement devient le talus naturel, on a

$$\alpha_0 = F(\varphi) ;$$

on a aussi

$$\alpha_1 = F(\beta_1).$$

Le talus naturel inférieur est en équilibre pour un talus supérieur d'inclinaison α_0 ; on peut admettre comme évident que, pour une

inclinaison moindre, le talus naturel inférieur ou tout autre talus plus plat est, à plus forte raison, en équilibre ; de sorte que pour

$$\alpha < \alpha_0$$

on peut toujours admettre le glissement de la plaque et appliquer la formule (73).

Si l'angle α est compris entre α_0 et α_1, il y a un plan d'éboulement correspondant ; le talus inférieur d'inclinaison β sera, à plus forte raison, en équilibre, si l'on a

$$\beta \leqq f(\alpha) ;$$

on peut encore appliquer la formule (73).

Mais si l'on a

$$\beta > f(\alpha),$$

il faut appliquer l'équation (72) et déterminer l'angle j. Enfin si l'on a

$$\alpha > \alpha_1,$$

l'hypothèse du glissement n'est jamais vraie ; on doit toujours appliquer la formule (72) et calculer l'angle j.

202. *Cas où la plaque entraîne les terres inférieures.* — Supposons l'angle α compris entre α_0 et α_1 et

$$\beta > f(\alpha) ;$$

il en résulte que β est aussi compris entre φ et β_1. Connaissant l'angle β, on peut déterminer l'angle $F(\beta)$ qu'il faut donner au talus supérieur pour que le talus inférieur soit un plan d'éboulement sous la plaque glissante ; on y arrive en construisant la figure 138. Or, on obtient ainsi un talus supérieur ayant une inclinaison plus petite que l'inclinaison donnée. Il faut donc faire tourner la discontinuité AR de manière à obtenir sous la plaque des pressions plus fortes. Si l'on augmente l'angle RAG, le contour apparent passe sous la plaque et le problème n'est pas résolu ; il faut donc diminuer cet angle. Si l'on diminue cet angle jusqu'à zéro, on obtient la solution linéaire sous la plaque et la courbe de la figure 131 indique que pour réaliser l'égalité des composantes verticales des pressions, il faut donner au talus supérieur une inclinaison égale ou plus grande que α_1. Nous obtiendrons donc la solution du problème en diminuant l'angle RAG de la figure 138 sans le prendre égal à zéro, sauf pour le cas limite

où β et α auraient les valeurs β_1 et α_1 ; on trouvera, sous la plaque, une solution conique à caractéristiques convexes vers le sommet, sauf pour le cas limite où la solution devient linéaire. Cette solution conique doit satisfaire à deux conditions : les composantes normales des pressions sous la plaque sont données et la solution doit être reliée à la solution commandée par le talus inférieur au moyen d'une ligne de discontinuité finie. Pour l'obtenir, on se donne deux fausses positions de AR et l'on interpole. On peut aussi employer la méthode des approximations successives. On se donne le premier élément AD (fig. 139) de la ligne de discontinuité ; on trace une caractéristique du premier système DE en la remplaçant par deux tangentes ; la première est donnée par la discontinuité, on détermine la seconde de manière à obtenir au point E la pression normale connue ; on admet que les erreurs commises dans le tracé de cette caractéristique auront une influence qui deviendra de plus en plus négligeable en s'éloignant du sommet. On trace alors successivement

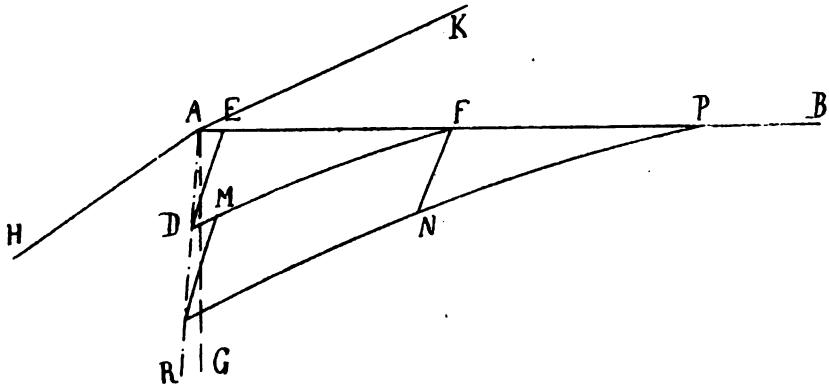

Fig. 139.

la caractéristique DF du second système par la même méthode que la caractéristique DE, le triangle DMK par la méthode générale qui donne la propagation d'une discontinuité, le quadrangle KMFN, le triangle FNP, et ainsi de suite. On aperçoit que le problème est résolu avec une approximation suffisante quand la discontinuité se propage en ligne droite et que l'angle u reste constant le long de la plaque. Nous avons choisi AD arbitrairement, il vaut mieux prendre AD de manière à obtenir en E et en F la même valeur de u. Connaissant la valeur définitive de l'angle u, on trouve facilement l'angle j par l'épure circulaire.

Supposons enfin que l'inclinaison du talus supérieur soit plus grande que α_1 ; quel que soit le talus inférieur, l'hypothèse du glis-

sement de la plaque sur les terres n'est plus possible ; il faut toujours construire une solution donnant sur la plaque des pressions normales connues et reliée à la solution linéaire de butée commandée par le talus inférieur ; mais dans ce cas, l'angle RAG peut s'annuler et l'on peut trouver une solution conique à caractéristiques concaves vers le sommet. La solution linéaire peut régner sous la plaque ; il est facile de trouver, par la courbe de la figure 131, les solutions linéaires de butée et de poussée qui donnent les mêmes pressions normales sur la plaque, et les inclinaisons des talus qui réalisent ces solutions. Si, dans l'une de ces solutions, on conserve le talus inférieur et si l'on diminue l'inclinaison du talus supérieur, on obtient une solution à caractéristiques convexes ; si l'on augmente l'inclinaison du talus supérieur, on obtient une solution à caractéristiques concaves. Si l'angle β est plus petit que β_1, on trouve toujours des solutions à caractéristiques concaves. On construit les solutions à caractéristiques concaves par les mêmes méthodes que les autres solutions, mais la discontinuité finie n'existe plus.

203. *États d'équilibre intermédiaire du massif inférieur.* — Parmi les états d'équilibre que nous avons rencontrés, il y en a qui sont des dernières limites ; ce sont ceux où le talus inférieur est un plan d'éboulement ; l'éboulement peut précéder le glissement de la plaque sur les terres ou se produire en même temps, selon que l'angle de la pression avec la normale à la plaque est plus petit ou égal à l'angle du frottement. Dans tous ces cas, on peut mener, par l'extrémité B de la plaque, une caractéristique du second système qui détache un fragment du massif; c'est ce fragment qui glisse vers le vide ; mais il se produit des glissements secondaires vers le haut, suivant les caractéristiques du premier système, et qui sont nécessités par la courbure et surtout par le point angulaire de la caractéristique du second système.

Nous avons rencontré d'autres états d'équilibre, mais nous ne les avons pas étudiés ; nous avons admis comme évident que, s'il y a équilibre, il y a, à plus forte raison, équilibre quand les talus deviennent plus plats, et nous n'avons pas cherché comment cet état équilibre était réalisé. Ce sont ces états d'équilibre intermédiaires que nous allons examiner.

Reprenons la figure 137 ; soit AH le talus inférieur dont l'inclinaison est comprise entre φ et β_1 ; nous supposons que l'inclinaison du talus supérieur croit à partir de zéro et nous admettons le glissement de la plaque sur les terres inférieures. Nous avons vu que les pressions sous la plaque sont connues et commandent une solution conique GBFC. Nous avons le choix entre deux nappes : la nappe BF, qui est de seconde espèce, et la nappe BG, qui est de première espèce.

Le talus inférieur AH commande une solution linéaire ; mais nous avons aussi le choix entre la solution linéaire de poussée AKH, qui est de seconde espèce, et la solution linéaire de butée AK'H, qui est de première espèce ; ces deux solutions forment les nappes d'une même solution conique ayant AH comme contour apparent. Il s'agit de relier les solutions commandées par la plaque et le talus au moyen d'une solution intermédiaire, et nous reconnaissons immédiatement qu'il y a indétermination. Parmi les trois solutions associées, la solution intermédiaire doit être d'une autre espèce que les deux autres, car la solution intermédiaire est reliée aux autres par des caractéristiques ou des lignes de discontinuité finie qui séparent toujours des solutions d'espèces différentes. Il résulte de là que, si nous choisissons sous la plaque la solution BF qui est de seconde espèce, nous devrons choisir la poussée sous le talus, tandis que, si nous choisissons la solution BG sous la plaque, nous prendrons la butée sous le talus. Nous examinerons successivement les deux dispositions.

Supposons d'abord le talus supérieur horizontal ; le massif supérieur disparait, les pressions sont nulles sur AB ; il s'agit donc de relier les deux solutions linéaires de poussée AKH et ADB ; on construit la solution intermédiaire sur les caractéristiques AD et AK ; on trouve une solution conique à faibles pressions et à caractéristiques concaves vers le sommet ; c'est le cas de la poussée des terres dans un angle saillant BAH, il n'y a pas de discontinuité finie (124). Faisons croitre l'inclinaison du talus supérieur à partir de zéro ; nous trouvons sous la plaque une solution BFC, présentant un contour apparent AF et terminée par une caractéristique AC ; l'angle DAC croit à partir de zéro. Faisons d'abord abstraction du contour apparent AF ; nous construirons sur AC et AK une solution conique, mais, comme l'angle CAK diminue, il arrivera un moment où cette solution sera linéaire, puis elle sera à fortes pressions et débordera l'angle de ses caractéristiques. Nous devons remplacer les contours apparents par des discontinuités finies ; nous obtiendrons d'abord une solution intermédiaire à caractéristiques concaves, limitée à gauche par une caractéristique et à droite par une discontinuité finie ; cette solution intermédiaire deviendra linéaire, puis elle sera à fortes pressions et sera limitée à droite et à gauche par des discontinuités finies. Si nous continuons à augmenter l'inclinaison du talus supérieur, il arrivera un moment où la caractéristique AC coïncidera avec AK' et la solution théorique intermédiaire sera construite sur AK' et AK ; cette solution théorique sera l'ensemble des deux solutions linéaires ; pour la rendre physiquement possible, il suffira de supprimer la nappe KAH, c'est-à-dire d'admettre la butée sous le talus. Nous arriverons à des résultats

peu différents, en supprimant le contour apparent AF par l'introduction d'une discontinuité finie. On voit donc que les deux discontinuités finies, dont nous avons constaté l'existence, vont se déplacer, et que la discontinuité de gauche finira par atteindre le talus et, à ce moment, la solution de poussée disparaît ; la solution totale se compose de la solution linéaire de butée reliée, par une discontinuité finie, à la solution commandée par la plaque. Cette solution limite est précisément celle que nous avons obtenue sur la figure 138, quand nous avons cherché le talus supérieur pour lequel AH est un plan d'éboulement.

Examinons maintenant la seconde disposition ; prenons la solution de butée sous le talus et la solution BG sous la plaque. Si nous supposons la charge nulle sur la plaque, nous trouvons les deux solutions linéaires de butée, mais comme l'angle A est saillant, la solution intermédiaire s'appuie sur deux discontinuités finies. Effectivement, les deux caractéristiques AK′ et AD′ (fig. 137) forment un angle plus petit que l'angle ordinaire des caractéristiques, on trouve une solution qui déborde l'angle de ses caractéristiques ; il faut remplacer les deux contours apparents par deux discontinuités finies. Si l'inclinaison du talus supérieur croît à partir de zéro, on doit relier la solution BAC′ à la solution HAK′ ; on doit construire une solution sur les deux caractéristiques AK′ et AC′ ; l'angle de ces deux caractéristiques est toujours plus petit que l'angle ordinaire qui est EAB ; on trouve donc encore une solution intermédiaire à faibles pressions, reliée aux deux autres par deux discontinuités finies, mais la nappe C′AB se réduit de plus en plus et peut même se réduire à zéro ; il arrivera donc un moment où la ligne de discontinuité de droite se confondra avec la plaque et comme la plaque ne cesse pas d'être contour apparent, la solution intermédiaire aura AB comme contour apparent. Nous retrouvons encore la solution de la figure 138 qui donne le talus correspondant à un plan d'éboulement donné.

Nous voyons qu'il y a indétermination dans l'état d'équilibre, lorsque l'inclinaison du talus supérieur satisfait à l'inégalité

$$\alpha < F(\beta) ;$$

mais si l'on a

$$\alpha = F(\beta),$$

les deux états d'équilibre ont une même limite ; c'est alors une dernière limite et le problème est déterminé.

Nous avons supposé l'angle β plus grand que β_1 ; prenons l'hypothèse contraire. Si l'on donne au talus supérieur l'inclinaison α_1, on trouve sous la plaque la solution linéaire ; on reconnaît facilement qu'on

peut la relier à la poussée sous le talus par deux discontinuités finies, de sorte que le premier système de trois solutions subsiste encore. Si l'on adopte la seconde disposition, on reconnaît que la nappe BG disparaît ; il reste donc un système de deux solutions : l'une est la butée des terres sous le talus, l'autre est une solution à caractéristiques concaves, il n'y a plus de discontinuités finies. Lorsqu'on fait croître l'angle α à partir de zéro, le second système de trois solutions se modifie de la manière suivante : on trouve d'abord deux discontinuités finies comme dans un angle saillant de butée ; puis les discontinuités deviennent des caractéristiques ordinaires, comme dans l'angle rentrant de butée ; enfin pour l'inclinaison α_1, la caractéristique de droite vient se confondre avec la plaque. On trouve donc encore deux états d'équilibre différents pour l'inclinaison α_1, et cela était à prévoir puisque le talus inférieur présente un excès de stabilité.

Lorsque β est précisément égal à β_1, la poussée sous le talus, dans la première disposition, disparaît au moment où l'on a la solution linéaire sous la plaque, et la discontinuité de droite devient une caractéristique ordinaire. Dans la seconde disposition, c'est la discontinuité de gauche qui devient une caractéristique ordinaire et la discontinuité de droite vient se confondre avec la plaque. L'état d'équilibre du massif inférieur est déterminé.

Lorsque l'angle α dépasse α_1, nous savons que l'angle du frottement ne peut pas être atteint sous la plaque ; il faut déterminer l'angle j, de la pression avec la normale à la plaque, pour lequel le talus inférieur est un plan d'éboulement. Il y a aussi des états d'équilibre intermédiaires ; on peut se donner un angle j plus petit que celui qui réalise la condition précédente ; on détermine une solution sous la plaque et on la relie à la poussée ou à la butée sous le talus.

204. *Cas d'un talus plan indéfini.* — Considérons une plaque horizontale enfoncée dans un talus plan indéfini ; le talus inférieur est alors le prolongement du talus supérieur. Cherchons dans quel cas le massif inférieur est en équilibre sous la plaque glissante. Lorsque l'inclinaison du talus supérieur est égale à α_0, le talus naturel est le plan d'éboulement du massif inférieur et ces deux talus forment un angle saillant ; lorsque l'inclinaison du talus supérieur est égale à α_1, l'inclinaison du plan d'éboulement du massif inférieur est égale à β_1 et ces deux talus forment un angle rentrant ; il existe donc une inclinaison intermédiaire pour laquelle les deux talus sont dans un même plan ; cette inclinaison satisfait à l'équation

$$\alpha = F(\alpha).$$

Soit A cette inclinaison ; on la trouvera par une interpolation entre deux fausses positions.

Si l'inclinaison du talus plan est égale ou inférieure à A, l'hypothèse du glissement de la plaque est compatible avec l'équilibre du massif inférieur ; car ce massif serait déjà en équilibre, s'il était limité par le plan d'éboulement ou le talus naturel, et ces plans ont une inclinaison égale ou plus grande que le talus donné. On doit alors appliquer la formule (73).

Si l'inclinaison du talus plan est supérieure à A, le massif inférieur n'est pas en équilibre sous la plaque glissante, car pour réaliser cet équilibre, il faudrait donner au talus inférieur l'inclinaison du plan d'éboulement, c'est-à-dire une inclinaison moindre que l'inclinaison donnée. Il peut même arriver qu'il n'y ait plus de plan d'éboulement ou d'équilibre sous la plaque glissante. Il faut alors déterminer l'angle j, pour lequel le talus redevient un plan d'éboulement, et appliquer la formule (72). Je dis que, dans la dernière limite de l'équilibre, on trouvera toujours sous la plaque une solution à caractéristiques convexes reliée à la butée par une discontinuité finie. En effet, si l'on prolonge la solution linéaire de butée du talus inférieur jusqu'à la plaque, la courbe de la figure 131 indique que l'on obtient, sous la plaque, des pressions normales trop grandes ; si l'on prend la solution qui admet la plaque comme contour apparent, on trouve des pressions normales trop petites, car elles seraient en équilibre pour une inclinaison du talus supérieur plus petite que l'inclinaison donnée ; la solution vraie est comprise entre ces deux solutions ; on l'obtiendra en diminuant l'angle de la discontinuité finie et de la caractéristique du premier système de la solution linéaire de butée ; on obtiendra toujours une solution à caractéristiques convexes vers le sommet. Il y a cependant un cas limite où ce raisonnement est en défaut : c'est lorsque le talus a l'inclinaison du talus naturel ; dans ce cas, la solution linéaire de butée se confond avec la solution de poussée qui règne au-dessus de la plaque ; c'est cette solution qui réalise l'équilibre des pressions normales ; mais alors les pressions des deux côtés de la plaque sont égales et de sens contraires, la résistance à l'extraction de la plaque est rigoureusement nulle.

205. *Cas d'un talus naturel limité par un plan horizontal.* — Soient : HACD (fig. 140) le profil du terrain, AB la plaque horizontale.

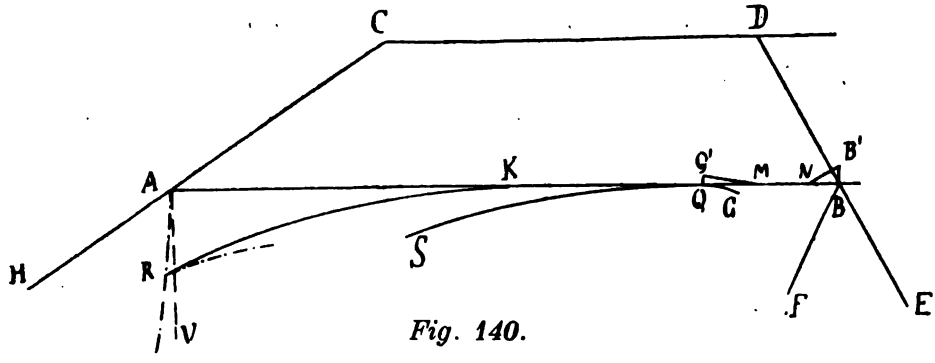

Fig. 140.

Nous chercherons d'abord la poussée minima du massif supérieur ; on reconnaît, comme au numéro 196, que le glissement sous les terres est impossible et que la solution commandée par la surface libre règne jusqu'à la plaque. Nous avons indiqué dans un cas semblable (124) comment on trouve les fonctions (p, u) sur le plan AB ; on en déduit par l'épure circulaire la grandeur et la direction de la pression P en un point quelconque de la plaque.

Nous supposerons d'abord la plaque indéfiniment flexible : les pressions normales supérieures et inférieures doivent se faire directement équilibre. Le talus naturel AH commande une solution linéaire limitée par une caractéristique verticale AV ; il s'agit de construire une solution satisfaisant aux deux conditions suivantes : les pressions normales sous la plaque sont données et la solution doit être reliée à la solution linéaire commandée par le talus, au moyen de la caractéristique AV ou une ligne de discontinuité finie. En prenant la limite relative d'un massif infiniment petit autour du point A, on est ramené au cas d'un talus indéfini ; dans le voisinage du point A, on a donc approximativement la solution linéaire, et les pressions supérieures et inférieures se font équilibre. En s'éloignant du point A, les pressions supérieures sont plus petites que dans le cas d'un talus naturel indéfini ; il est donc à prévoir que l'on obtiendra une ligne de discontinuité finie tangente au point A à la verticale. On construit l'épure par la méthode générale ; nous avons traité un cas semblable au numéro 201 (fig. 139). Si l'on continue à s'éloigner du point A, les pressions normales deviennent comparables à celles qui seraient produites par un talus de plus en plus plat ; il est donc à prévoir qu'en un certain point K, l'angle j deviendra égal à l'angle du frottement ; et à partir de ce point, on pourra conserver cet angle jusqu'à l'extrémité de la plaque. On peut alors construire à priori la solution qui règne sous la plaque, mais il faut la relier à la solution linéaire par une solution intermédiaire. Il est d'ailleurs inutile de construire l'épure, on obtient la résistance tangentielle par la formule (73) ou une composition de forces. On peut alors représenter toutes les forces tangentielles par un diagramme et trouver la résistance totale par une intégration graphique.

Supposons ensuite que la plaque soit d'une rigidité absolue ; il n'est plus nécessaire que les pressions normales soient identiques au-dessus et au-dessous de la plaque ; il suffit qu'elles forment deux systèmes de forces équivalents au point de vue de la statique des solides invariables. Soit (fig. 141) AEF le diagramme des pressions normales supérieures ; le talus inférieur sera strictement en équilibre sous la plaque glissante, si les pressions normales inférieures sont représen-

tées par le diagramme AF'B qui correspond au talus supérieur d'inclinaison α_0 ; il sera, à plus forte raison, en équilibre, si les pressions normales inférieures sont diminuées et représentées par un diagramme AE'F''. Cherchons donc un diagramme AE'F'' statiquement équivalent au diagramme AEF. Soient : S et M la surface et le moment autour du point B du diagramme AEF, S' et M' les mêmes éléments pour le diagramme rectiligne AF' ; retranchons une certaine surface S'' de la surface S' et posons :

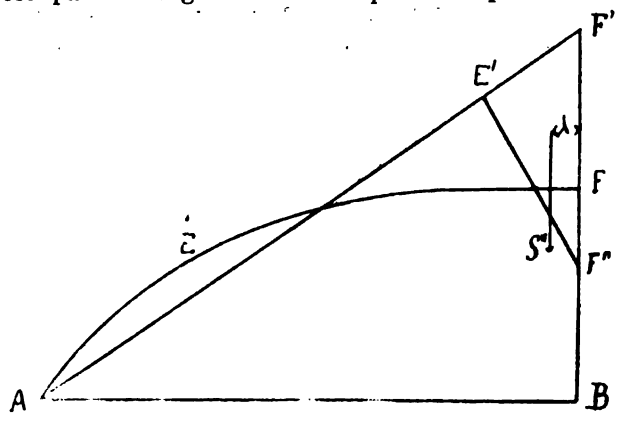

Fig. 141.

$$S'' = S' - S,$$

$$S'' \lambda = M' - M,$$

en désignant par λ la distance du centre de gravité de la surface S'' à la verticale du point B.

Faisons croitre la longueur de la plaque à partir de zéro ; nous savons que le glissement de la plaque est d'abord impossible ; cherchons à quel moment il devient possible. Construisons (fig. 142) les intégrales secondes AMP et ANM des diagrammes AEF et AF' ; soit M le point d'intersection de ces deux courbes et donnons à la plaque la longueur Am ; on aura :

$$M' = M,$$

$$S' > S,$$

$$\lambda = o.$$

On doit donc donner à S'' une largeur nulle ; les ordonnées sont infinies, les pressions deviennent moins l'infini ; c'est une impossibilité. Menons une tangente comme NP aux deux courbes et donnons à la plaque la longueur Ap ; le diagramme AN'n sera équivalent au

diagramme donné, car les moments autour de tous les points du plan sont représentés par les ordonnées de la droite NP ; les pressions négatives sont disparues, mais on trouve encore des pressions nulles

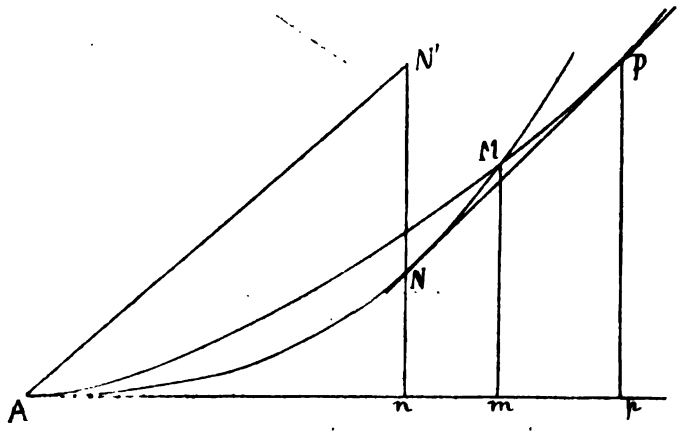

Fig. 142.

sur le segment *np*. Nous allons démontrer qu'il suffit d'augmenter la longueur A*p* d'une petite quantité, à déterminer par une épure, pour que le glissement de la plaque soit possible.

Cherchons, en effet, les plus petites pressions que l'on peut obtenir sur un segment QB (fig. 140) porté à partir de l'extrémité de la plaque. Par le point B, passe une caractéristique BE du premier système commandée par la surface libre ; au point B, la caractéristique du second système est dirigée suivant la plaque ; il y a donc une discontinuité finie dans la variation de l'angle u ; mais c'est une discontinuité évanouissante. Nous pouvons construire une solution pseudo-conoïde en prenant B comme foyer et BE comme caractéristique du premier système ; nous limiterons cette solution à la caractéristique BF du premier système qui fait avec BA l'angle ordinaire des caractéristiques. Nous construirons alors une solution sur la caractéristique BF et sur BA considéré comme caractéristique du second système. A la vérité, nous pouvons aussi mener par B une caractéristique curviligne du second système touchant la plaque et construire une nouvelle solution sur cette caractéristique et sur BA pris comme contour apparent ; mais on reconnait facilement que les plus petites pressions s'obtiennent en prenant la plaque comme caractéristique. En effet, calculons la variation de la pression p sur un élément ds du contour apparent BA ; on peut passer d'une extrémité à l'autre de cet élément en suivant

deux arcs de caractéristiques de systèmes opposés ; la longueur de l'arc du second système diffère infiniment peu de ds ; la longueur de l'autre arc est d'ordre supérieur ; soit ρ le rayon de courbure de l'arc du second système, on trouve :

$$dp = -\Pi\, ds \sin\varphi + 4\, p \operatorname{tang}\varphi\ \frac{ds}{\rho};$$

on voit que la pression décroît le plus vite lorsque le rayon de courbure est infini, c'est-à-dire quand la plaque est une caractéristique. On trouve alors un diagramme B'N pour les pressions normales. Les pressions deviennent très petites, car, dans la solution pseudo-conoïde, la pression décroît suivant la formule du n° 157 ; pour un coefficient de frottement égal à deux tiers, on trouve que la pression varie dans le rapport de 4.18 à l'unité en passant de la caractéristique BE à la caractéristique BF. Au point Q, il se produit une chute de pression beaucoup plus grande encore. Nous admettons, sous la plaque, la solution conique qui touche la plaque ; elle est limitée par une caractéristique du second système que nous désignerons par QS, mais qui diffère de celle que nous avons considérée dans le cas de la plaque flexible. Nous prendrons Q comme foyer d'une solution pseudo-conoïde, QS comme caractéristique initiale, et nous ferons tourner cette caractéristique de 180 degrés autour du point Q. On trouve que la pression varie dans le rapport de 63.8 à l'unité en passant de la caractéristique QS à la caractéristique QG. On peut calculer la courbure au point Q de cette dernière caractéristique, en appliquant les formules du n° 157 : on obtient une courbure très forte et, à cause de cette courbure, la pression décroît rapidement le long du contour apparent et peut même s'annuler en un certain point M. On trouve donc des pressions normales très petites sur le segment QB.

Nous pouvons, dans une première approximation, négliger ces petites pressions et nous trouvons que la longueur minima de la plaque, qui admet le glissement sur les terres inférieures, est la longueur Ap construite sur la figure 142. Nous pouvons alors construire le diagramme des pressions négligées sur le segment np ; les moments de ce diagramme sont représentés par la tangente à l'extrémité de l'intégrale seconde. Cherchons ensuite, par la méthode des fausses positions, deux nouveaux points N et P (fig. 142) tels que la seconde tangente, par rapport à la première, représente précisément les moments du diagramme des pressions négligées ; nous obtiendrons une nouvelle longueur Ap, un peu plus grande que celle que nous avons obtenue en premier lieu ; c'est la longueur minima demandée.

Soit l cette longueur minima ; si l'on a

$$AB \geqslant l,$$

le talus inférieur est en équilibre sous la plaque glissante ; on applique, en chaque point, la formule (73) ou le triangle des forces qui la remplace. On représente alors les forces tangentielles par un diagramme et l'on obtient la résistance totale par une intégration graphique.

Si l'on a

$$AB < l,$$

le talus inférieur n'est plus en équilibre sous la plaque glissante. Il faut supposer un angle j plus petit que l'angle du frottement et donner à cet angle la plus grande valeur possible, pour obtenir la résistance maxima. Il y a une relation entre l'angle j et la longueur de la plaque. Pour une valeur donnée de j, on cherchera la longueur minima de la plaque par une construction analogue à celle qui nous a donné la longueur l ; la seule différence est que le diagramme rectiligne qui permet l'angle du frottement sous la plaque est remplacé par le diagramme rectiligne qui permet l'angle j ; on calculera la plus grande réduction des pressions sur le segment extrême, en supposant l'angle φ sous ce segment. En diminuant l'angle j, les ordonnées du diagramme rectiligne augmentent ; les ordonnées de la courbe des moments ANM augmentent ; il en résulte que le point M et les points N et P se rapprochent du point A ; on trouve que la longueur minima de la plaque diminue de l à zéro pour un angle j qui diminue depuis φ jusqu'à la valeur qui est réalisée dans la solution linéaire commandée par le talus. Soit (j, λ) un groupe de valeurs correspondantes ; on ne peut augmenter l'angle j sans augmenter λ ; mais on peut diminuer j et conserver λ qui est alors plus grande que la longueur minima, de sorte que la valeur de j est maxima pour une longueur donnée λ et la longueur λ est minima pour un angle donné j.

Nous avons considéré les deux cas extrêmes d'une plaque indéfiniment flexible ou absolument invariable ; examinons le cas de la réalité. Au point de vue absolu, il faut accepter la même solution que pour la plaque indéfiniment flexible, car si la plaque fléchit, il se produit des mouvements dans les terres et l'équilibre est rompu. Mais on peut considérer ces petits mouvements comme n'ayant aucun inconvénient et alors on peut accepter la même solution que pour la plaque invariable.

206. *Résistance de la plaque à l'enfoncement.* — Nous supposons la plaque sollicitée par une force horizontale dirigée vers les

terres et augmentant graduellement ; quelle est la grandeur de cette force au moment où la plaque est sur le point de s'enfoncer dans le talus ? Nous avons déjà indiqué (197) comment on détermine la butée du massif supérieur. Il nous reste à chercher la résistance du massif inférieur.

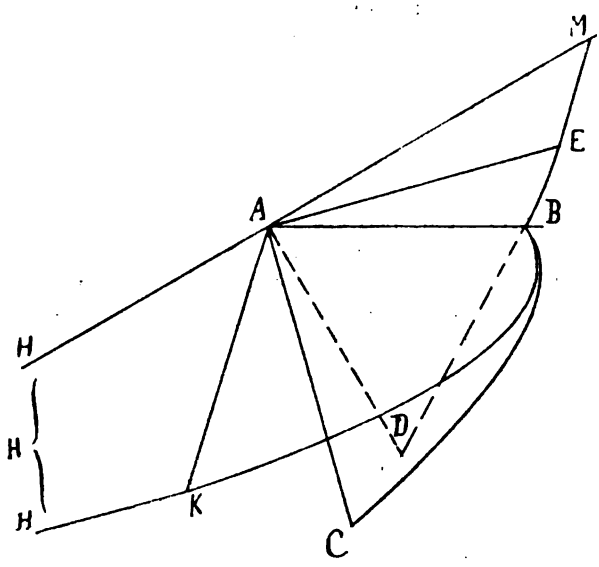

Fig. 143.

Soient : AH (fig. 143) le talus inférieur, et AB la plaque. Nous supposons que la plaque est sur le point de glisser sur les terres inférieures ; en un point quelconque de la face inférieure, la caractéristique du premier système est dirigée suivant la plaque elle-même ; la droite AB est un contour apparent du premier système, car si cette droite était une caractéristique, on trouverait des pressions négatives ; il résulte aussi de là que la solution est toujours à fortes pressions et située au-dessous de la plaque, quelle que soit la pression positive que l'on se donne sous la plaque. Le talus inférieur AH commande une solution linéaire de poussée ou de butée. Nous obtiendrons la butée maxima, en prenant la solution linéaire de butée AKH et en construisant une solution conique sur la caractéristique AK et le contour apparent AB, tous deux du premier système ; nous trouvons ainsi, sous la plaque AB, les fortes pressions que nous avons obtenues dans le cas d'un remblai de chemin de fer (187) ; les composantes normales de ces pressions sont beaucoup plus grandes que les pressions normales supérieures. Pour résoudre le problème proposé, nous devons adopter des pressions normales inférieures égales aux pressions normales supérieures. Nous avons désigné par Q (197) la pression au point B des terres supérieures ; la pression des terres inférieures aura la même valeur : car ces deux pressions forment l'angle du frottement avec la normale à la

plaque et l'égalité des composantes normales entraine l'égalité des pressions. La résultante des deux composantes tangentielles est alors

$$R = 2Q \sin \varphi.$$

On pourrait construire l'état d'équilibre du massif inférieur, mais cela n'est pas indispensable ; nous avons dû diminuer les pressions maxima que le massif inférieur peut supporter, il y a donc un excès de stabilité. On trouverait sous la plaque, comme au numéro 203, deux nappes d'espèces différentes ; l'une pourrait être reliée à la poussée sous le talus et l'autre à la butée ; il y a indétermination comme dans tous les équilibres intermédiaires.

Lorsque l'inclinaison du talus supérieur est inférieure à l'angle β_1, la caractéristique AE passe sous la plaque et nous avons vu que la butée maxima du talus supérieur s'obtient par la solution linéaire. On trouve donc au-dessus de la plaque une pression P faisant un certain angle i avec la normale à la plaque. On en déduit la pression normale inférieure et les deux composantes tangentielles ; la résultante de ces dernières est

$$T = \frac{P \sin (i + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

On obtient la résistance totale en multipliant la résistance à l'extrémité par la moitié de la longueur de la plaque.

207. *Surface d'éboulement sous une voûte chargée.* — Soit EF (fig. 144) un talus naturel ; on établit une construction qui se compose d'un plan vertical fixe et rigide CBD et d'un plan horizontal AB invariablement lié au plan vertical ; le plan horizontal est chargé de terre jusqu'au niveau CE ; on demande de construire la courbe d'éboulement TN qui se produit sous le plan AB.

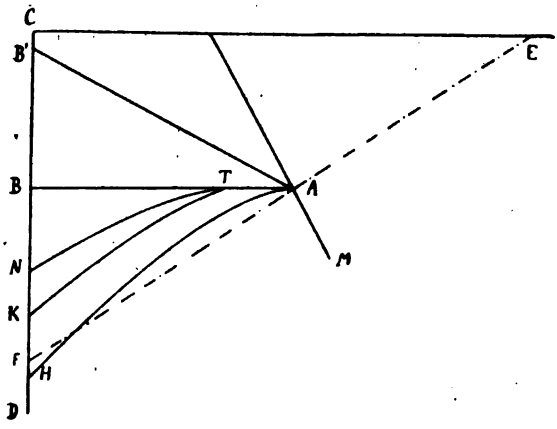

Fig. 144.

Dans la réalisation pratique de cette construction, le plan horizontal sera remplacé par une suite de voûtes reposant sur des contreforts ;

nous substituons un plan aux voûtes et nous négligeons le frottement sur les piédroits, afin de pouvoir appliquer la théorie des massifs prismatiques.

Le plan libre CE commande une solution linéaire ; menons par A la caractéristique AM du premier système. Les terres tendent à glisser sous la voûte ; il y a donc aussi en A une caractéristique AH du premier système qui touche la voûte. Nous construirons une solution pseudo-conoïde en prenant A comme foyer ou caractéristique ponctuelle du second système, et AM comme caractéristique initiale du premier système ; nous limiterons cette solution à la caractéristique AH qui touche la voûte. Nous construirons ensuite une solution sur la caractéristique AH et le contour apparent AB ; nous obtiendrons une pression nulle en un certain point T ; la courbe d'éboulement TN sera déterminée par la caractéristique du premier système qui passe par ce point.

Nous avons de cette manière dressé les épures des figures 145 et 146 ; la figure 145 est le plan du massif et des caractéristiques ; la

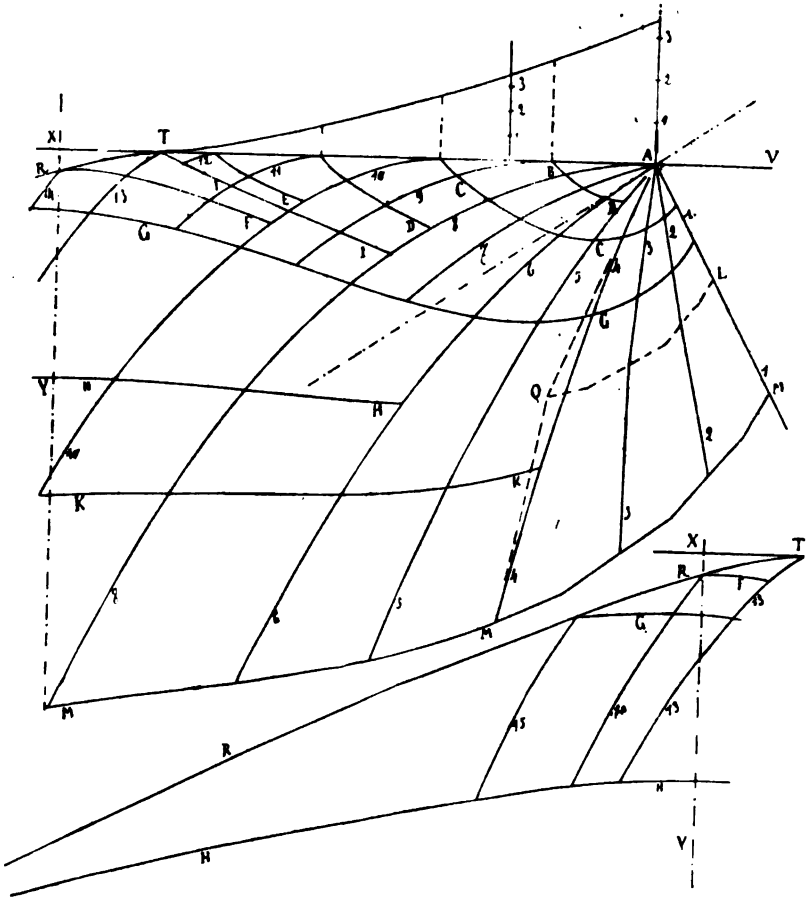

Fig. 145.

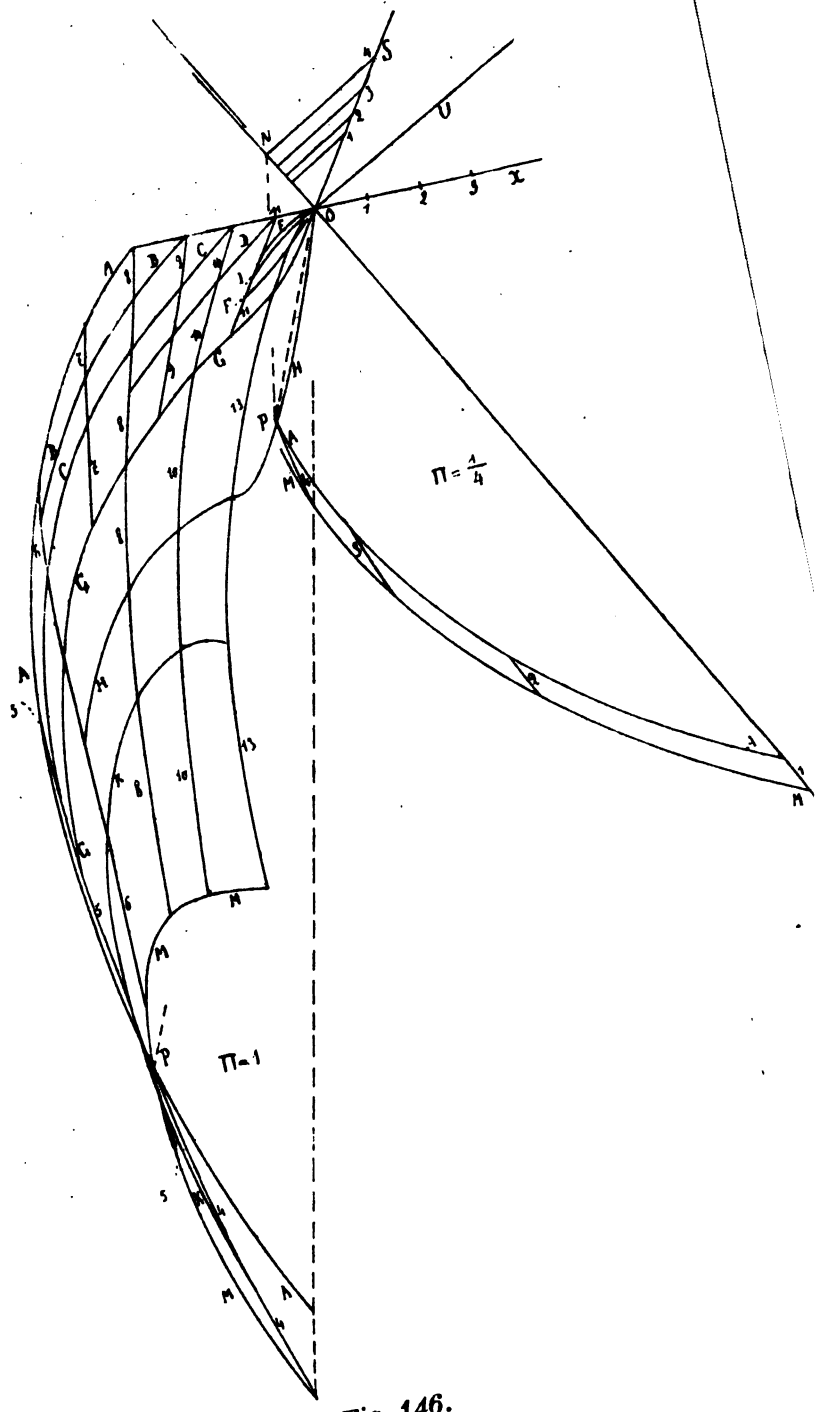

Fig. 146.

figure 146 est l'épure des pressions. Nous avons admis un coefficient de frottement égal à deux tiers. La voûte est AT (fig. 145) ; le niveau supérieur des terres sort des limites du dessin ; mais nous avons représenté, par une échelle verticale partant du point A, les centièmes de la hauteur des terres supportées. Les caractéristiques du premier système sont numérotées ; la caractéristique 1 est la caractéristique rectiligne de la solution linéaire ; la solution pseudo-conoïde est comprise entre la caractéristique 1 et la caractéristique 8 ; la solution qui touche la voûte est comprise entre la caractéristique 8 et la caractéristique 13 qui détermine la courbe d'éboulement TR. Pour ramener l'épure dans les limites du dessin, nous avons mené une coupe XY et nous avons transporté, vers le bas et vers la droite, la partie de l'épure située à gauche de cette coupe. Les caractéristiques du second système sont représentées par des lettres ; le point A est la première, la courbe M est la dernière des caractéristiques que nous avons construites ; les autres caractéristiques ne sont tracées que là où elles ont été utilisées.

Nous avons indiqué par les mêmes notations les courbes (p, u) de l'épure des pressions (fig. 146). Cette épure comprend deux parties dressées à deux échelles différentes. Les pressions sur les caractéristiques 1 à 4 sont très grandes, aussi nous avons réduit le poids spécifique à un quart. Les pressions sur les caractéristiques suivantes sont plus petites ; nous avons réduit le poids spécifique à l'unité. La pression en A sur la caractéristique 1 est représentée par le rayon qui joint le pôle O de l'épure des pressions au point (A, 1) de cette épure ; les pressions en A sur les différentes caractéristiques qui passent par ce point sont représentées par la spirale A ; au point P se produit le changement d'échelle, la spirale continue dans la seconde partie de l'épure jusqu'à la courbe 8. Cette spirale peut être construite par tangentes successives ; on peut aussi calculer les rayons vecteurs par logarithmes. Nous avons, au numéro 157, exposé une méthode qui permet de construire la courbure ε d'un arc s de caractéristique porté à partir du foyer ; cette courbure est donnée par la formule

$$\varepsilon = \frac{s}{h'} + \beta.$$

On peut construire h' et obtenir l'angle représenté par le premier terme. On arrive à une construction plus élégante en remplaçant h' par sa valeur ; on trouve alors

$$\varepsilon = \frac{s \cos \omega \sin (u + \gamma)}{h} + \beta.$$

Rappelons que nous avons posé :

$$\operatorname{tang} \omega = 3 \operatorname{tang} \varphi,$$

$$\eta = \omega + a.$$

Menons les droites OS et ON telles que

$$\mathrm{S}ox = 2a,$$

$$\mathrm{NOS} = \omega.$$

Soit, par exemple, à construire la courbure d'un arc de la caractéristique 4 ; on a

$$\mathrm{OP} = \frac{h}{4};$$

portons

$$\mathrm{OS} = \frac{s}{4},$$

et projetons orthogonalement OS sur ON ; je dis que l'on a

$$\varepsilon = -\mathrm{NPO} + \beta.$$

En effet, décrivons l'arc de cercle ON′ du point P comme centre ; au degré d'approximation où nous nous plaçons, on a

$$\mathrm{ON}' = \mathrm{ON} \sin \mathrm{NOP} = -\mathrm{ON} \sin (u + \eta),$$

$$\mathrm{ON} = \frac{s \cos \omega}{4};$$

la valeur de ε devient

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OP}} + \beta = -\mathrm{NPO} + \beta.$$

On détermine la constante en appliquant la formule à la caractéristique initiale dont la courbure est nulle ; il se fait que l'angle NPO devient alors tellement petit qu'il se perd dans l'épaisseur du trait ; on a donc :

$$\varepsilon = -\mathrm{NPO}.$$

Comme OP est la direction de la tangente à l'origine de l'arc, NP est la direction de la tangente à l'extrémité de cet arc.

Nous avons pris (fig. 145) :

$$s = AM;$$

soit

$$AL = \frac{AM}{2};$$

Construisons la spirale LQ qui serait la caractéristique dans la solution conoïde ; nous prendrons AQ comme première tangente et nous obtiendrons la seconde en menant par Q une parallèle à la droite NP de la figure 146. Appliquons cette construction aux caractéristiques 1, 2, 3, 4 ; nous pouvons tracer les tangentes successives de la caractéristique M en utilisant l'épure circulaire ; nous pouvons ensuite déterminer les pressions aux points obtenus, soit en suivant les caractéristiques qui partent du point A, soit en suivant la caractéristique M ; nous avons obtenu les mêmes pressions, jusqu'au point (M, 4) ; au-delà de ce point, la vérification ne se produit plus, aussi, nous avons pris un arc plus petit AG sur la caractéristique 4, puis un arc encore plus petit sur la caractéristique 5. Nous avons, en résumé, appliqué la méthode générale, mais nous avons évité la fausse position, par la détermination de la courbure. Les quadrangles qui complètent la solution pseudo-conoïde ont été construits par la méthode ordinaire.

La construction de la solution déterminée par la caractéristique 8 et le contour apparent AT présente une petite difficulté au point T. Les caractéristiques B, C, D, E, coupent le contour apparent sous un angle constant complémentaire de l'angle du frottement ; on serait tenté de croire qu'il en est de même de la caractéristique I, qui passe par le point T. Je dis, au contraire, que cette caractéristique I prend au point T la direction des caractéristiques de la solution linéaire de butée commandée par un plan libre horizontal. En effet, construisons la limite relative d'un massif infiniment petit autour du point T. Supposons d'abord que la pression sur le contour apparent, à une distance infiniment petite du point T, soit infiniment petite du premier ordre ; on doit remplacer cette pression par sa limite relative, qui est proportionnelle à la distance au point T ; on trouve donc une solution conique ayant T comme sommet et AT comme contour apparent ; les caractéristiques sont convexes vers le sommet ; la nappe est donc limitée vers le bas par un contour apparent du second système. Or, ce contour apparent n'existe pas ; les caractéristiques du second système divergent en se dirigeant vers la région du point T et ne peuvent pas se couper pour former un contour apparent.

Il faut donc rejeter comme impossible l'hypothèse où nous nous sommes placés et en conclure que la pression sur le contour apparent est infiniment petite, d'ordre supérieur au premier par rapport à la distance au point T. Dans ce cas, la pression sur le contour apparent devient nulle aux limites relatives ; on trouve donc la solution linéaire commandée par le plan libre TA ; on en conclut que la tangente à la courbe I au point T est une caractéristique de cette solution linéaire. Les courbes D, E, ont la courbe I pour limite ponctuelle ; mais elles présentent, près de leurs points de rebroussement, des arcs à forte courbure, dont les longueurs sont d'ordre supérieur au premier, et qui disparaissent, non seulement aux limites absolues, mais aussi aux limites relatives ; aux limites relatives, les caractéristiques deviennent des droites parallèles.

Pour confirmer ce résultat, nous avons construit le diagramme des sous-pressions qui agissent sur la voûte ; nous avons obtenu une courbe qui tend à toucher le plan AT en un certain point. Cette courbe ne détermine pas le point de contact avec beaucoup d'exactitude ; pour l'obtenir avec plus de précision, on se donne une fausse position du point (I, 11) ; on peut tracer la caractéristique I, en la remplaçant par deux tangentes dont on connaît les directions ; on obtient la position juste lorsque la pression sous la voûte est égale à zéro.

On construit alors sur la caractéristique 13 la dernière solution qui est limitée à la courbe d'éboulement. On peut évidemment construire la courbe d'éboulement et les caractéristiques jusqu'au mur vertical et représenter par deux diagrammes les pressions normales et tangentielles qui se produisent sur ce mur. Par une double intégration graphique, on déterminera la résultante de ces pressions ainsi que la résultante des pressions sous la voûte.

208. *Influence de l'eau sur les sous-pressions.* — Supposons que la construction, dont il vient d'être question, soit établie au bord d'un canal ou d'un bassin, et que le niveau de l'eau coïncide avec le plan de la voûte. Supposons, en outre, qu'il se forme dans les terres une couche aquifère limitée à ce même plan. Nous avons vu que l'on doit, dans la couche aquifère, admettre le poids spécifique Π' des terres plongées dans l'eau. Ayant représenté la pression en A (fig. 145) par une certaine hauteur h, on doit réduire le nouveau poids spécifique à l'unité et représenter la même pression par

$$\frac{\Pi h}{\Pi'}$$

On obtiendra donc une épure semblable à celle que nous avons obtenue; le rapport de similitude est le rapport des poids spécifiques dans l'air et dans l'eau. Il est évident que l'on peut conserver la même épure, si l'on réduit l'échelle dans le rapport inverse. Nous avons représenté les centièmes de la hauteur des terres par l'échelle verticale menée par le point A ; pour tenir compte de la présence de l'eau, il suffit d'adopter l'échelle plus petite que nous avons représentée à gauche de la première.

Il résulte de ces considérations que, pour une même charge de terre, la présence de l'eau a pour effet d'augmenter la longueur AT dans le rapport des poids spécifiques, c'est-à-dire dans le rapport de 1.700 à 700 pour le sable léger. Les sous-pressions par unité de surface restent les mêmes aux points homologues ; car, si les longueurs qui représentent ces pressions augmentent dans le rapport de similitude, les pressions effectives reviennent à leurs valeurs primitives. On en conclut que la résultante des sous-pressions augmente dans le rapport des poids spécifiques. Les poussées sur le mur vertical varient suivant une loi plus compliquée.

209. *Courbe d'éboulement sous un plan oblique.* Nous pouvons modifier les données du problème du numéro 207 en remplaçant le plan horizontal AB par un plan incliné AB' (fig. 144). Lorsque l'inclinaison de ce plan ne dépasse pas celle du talus naturel, on obtient toujours une courbe d'éboulement tangente au plan; si l'inclinaison est plus grande, la tangente à la courbe d'éboulement est d'abord la direction du plan libre qui donne une caractéristique du premier système parallèle au plan; si l'inclinaison augmente encore, on rencontre certaines difficultés que nous allons examiner.

Soit (fig. 147) AH le plan fixe chargé d'une hauteur de terre que nous représentons par une échelle des centièmes de cette hauteur. Nous avons donné au plan AH l'inclinaison des caractéristiques du premier système de la solution linéaire qui règne sous le niveau horizontal des terres ; cette solution se prolongera alors jusqu'au plan AH et l'on obtiendra sous ce plan la même solution pseudo-conoïde que nous avons construite dans le problème précédent, mais prolongée à gauche vers le haut. Ainsi, la caractéristique 8 de la figure 145 est devenue la caractéristique 1 de la figure 147 ; nous avons adopté une échelle plus grande et multiplié le nombre des caractéristiques du second système. Si l'on examine les caractéristiques 2 à 7 et les courbes correspondantes de l'épure des pressions, on voit que la pression décroît et passe par un minimum en s'éloignant du point A suivant l'une de ces caractéristiques ; ce minimum devient nul pour une certaine caractéristique comprise

entre 6 et 7. On arrive au même résultat en examinant les caractéristiques du second système ; on trouve une caractéristique b où la

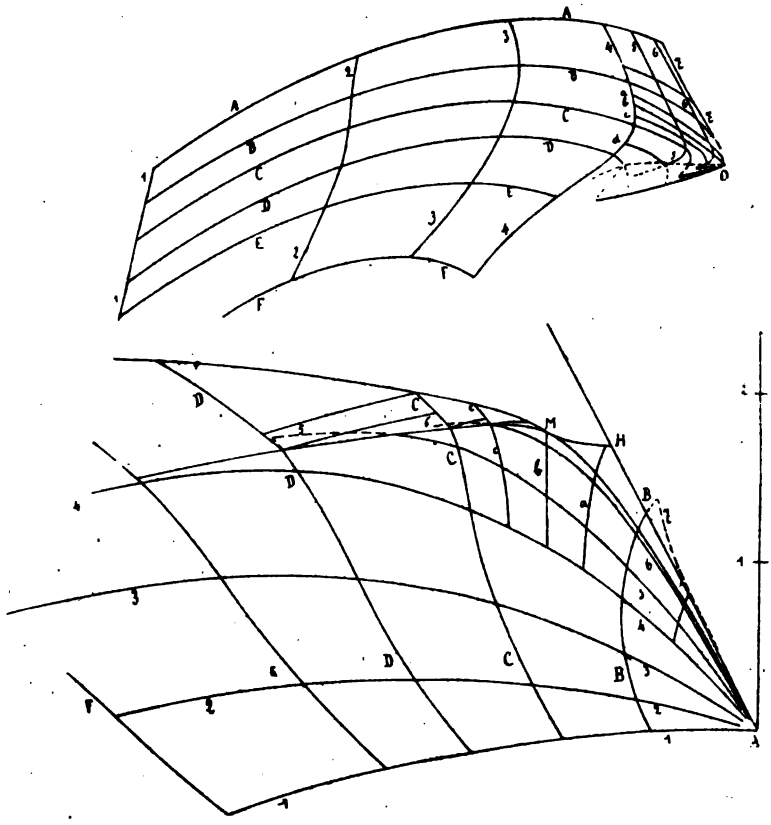

Fig. 147.

pression décroit jusqu'à zéro. Au point M, où la pression est nulle, la tangente à la caractéristique du premier système a la direction du premier talus naturel. Les caractéristiques 6, 5, 4 forment un contour apparent qui passe par le point M ; les caractéristiques F, E, D, C présentent une inflexion suivie d'un rebroussement.

Nous avons résolu le problème en construisant la courbe d'éboulement MH déterminée par la caractéristique AM ; nous avons ensuite, à gauche du point M, construit une solution déterminée par les deux conditions de présenter une surface libre et de s'appuyer sur la

solution pseudo-conoïde par une ligne de discontinuité finie. La solution AMH est en équilibre, mais n'est pas la dernière limite des solutions en équilibre. Pour obtenir cette dernière limite, on devrait prolonger la solution pseudo-conoïde à droite de AM. On trouve que la caractéristique qui touche le plan AH au point A, sort des limites du massif ; on doit donc prolonger la solution pseudo-conoïde jusqu'à ce plan. Cette solution n'est pas identique à celle que nous avons construite ; elle est terminée vers le haut par un contour apparent qu'il faut remplacer par une ligne de discontinuité finie. Mais les pressions sont tellement petites sur ce contour apparent, qu'il est impossible, à l'échelle admise, de montrer la différence qui existe entre ce contour apparent et la courbe MH ; le problème est donc résolu avec une exactitude suffisante.

A continuer.

DUQUESNE-MASQUILLIER & FILS
25, Grand-Rue, 25
LABOR
MONS